Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Ф.М. ДОСТОЕВСКОГО

И.П. Бесценный, Е.В. Мякишева, Е.В. Бесценная

АЛГЕБРА

Учебное пособие

Омск

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

2012

УДК 512.8
ББК 22.14я73
Б 539

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом ОмГУ

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, доц. *В.Н. Степанов*,
канд. физ.-мат. наук, доц. *И.А. Фирдман*

Бесценный, И.П.
Б 539 Алгебра: учебное пособие/И.П. Бесценный, Е.В. Мякишева, Е.В. Бесценная. – Омск: Изд-во Ом. гос. ун-та, 2012. – 76 с.

ISBN 978–5–7779–1418–7

Способствует выработке практических навыков решения задач по алгебре. Соответствует Государственному образовательному стандарту по направлению подготовки 230100 «Информатика и вычислительная техника».

Для студентов заочной и очно-заочной форм обучения.

УДК 512.8
ББК 22.14я73

ISBN 978–5–7779–1418–7

Введение

Данное пособие содержит индивидуальные задания для самостоятельной работы студентов по дисциплинам «Алгебра» и «Высшая алгебра», сопровождаемые необходимыми определениями и пояснениями. Эти задания способствуют закреплению теоретического материала и выработке необходимых умений и навыков. Весь материал соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту по направлению подготовки 230100 «Информатика и вычислительная техника». Пособие предназначено в первую очередь для студентов заочной и очно-заочной форм обучения, но может быть использовано и для других форм обучения.

Учебное пособие состоит из шести глав, соответствующих темам, изучаемым во время аудиторных занятий. В каждой главе приводятся необходимые теоретические сведения, 40 вариантов задач, десять (или чуть больше) упражнений и несколько примеров решения заданий. Задачи являются обязательной основой выполняемых студентами заочной и очно-заочной форм обучения контрольных работ. Решение упражнений необходимо для более качественного усвоения материала.

Решение всех заданий требует внимания и аккуратности. После решения необходимо сделать пунктуальную проверку.

Глава 1

Алгебраические структуры

Отображение $f : A^n \to A$ называется n-местной операцией на множестве A. Существенно, что результат операции $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ снова прнадлежит множеству A. Подмножество декартовой степени $R \subseteq A^n$ называется n-местным отношением на множестве A. Можно отождествить отношение с соответствующим предикатом $R(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, который принимает значение «истина», если и только если $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle \in R$.

Набор операций и отношений с указанием количества их аргументов («местности») называется сигнатура. Например, сигнатура арифметики – $\Sigma = \{plus^{(2)}, minus^{(1)}, mult^{(2)}, zero^{(0)}, less^{(2)}\}$. Цифры в скобках сверху – указание «местности». Для двухместных операций и отношений часто используется инфиксная запись, когда вместо $f(a_1, a_2)$ и $R(a_1, a_2)$ пишут $a_1 f a_2$ и $a_1 R a_2$ соответственно. Например, $a_1 + a_2$ и $a_1 < a_2$.

Алгебраическая система сигнатуры Σ – это множество A вместе с заданными на нем операциями и отношениями, входящими в Σ. Строгое обзначение алгебраической системы $\mathcal{A} = \langle A, \Sigma \rangle$, но когда сигнатура заранее оговорена, мы будем обозначать алгебраическую систему также, как и ее основное множество A.

Частный случай алгебраической системы, когда сигнатура не содержит символов отношений, называется алгебраическая структура или, короче, алгебра. Таким образом, алгебра – это множество A вместе с заданными на нем операциями фиксированной сигнатуры.

Самый простой случай – одна двухместная операция $\Sigma = \{*^{(2)}\}$. Алгебру с одной двухместной операцией называют группоид. Если же эта двухместная операция обладает свойством ассоциативности, то есть для всех $a, b, c \in A$ выполняется равенство $a*(b*c) = (a*b)*c$, то такая алгебра называется полугруппой. Свойство ассоциативности довольно широко распространено. Помимо хорошо знакомых операций сложения и умножения, им обладают пересечение и объединение множеств, операции взятия максимума и минимума. Основной пример полугруппы – множество отображений некоторого множества B в себя с операцией композиции (подстановки). Если $f : B \to B$ и $g : B \to B$ – два отображения, то их композиция $f \circ g : B \to B$ определяется правилом $f \circ g(x) = f(g(x))$. Доказательство ассоциативности этой операции оставляется в качестве упражнения. Основным этот пример является потому, что верна

Теорема. Любая полугруппа $\langle G, * \rangle$ изоморфна некоторой подполугруппе всех отображений множества G_1 в себя.

Доказательство приведено в [1, с. 230].

Элемент e называется нейтральным для двухместной операции $*$, если для любого $a \in G$ выполнено $a*e = e*a = a$. Для операции сложения нейтральный элемент – это 0, для умножения – 1, для объединения – пустое множество, для композиции – тождественное отображение.

Элемент a^{-1} называется обратным к элементу a, если верно $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$. В полугруппе не обязательно существует обратный для каждого элемента, но если существует, то определяется однозначно. Группа – это полугруппа с нейтральным элементом, в которой каждый элемент имеет обратный. Не уменьшая общности, можно рассматривать группу как алгебру сигнатуры $\Sigma = \{*^{(2)}, {a^{-1}}^{(1)}, e^{(0)}\}$ с нульместной (без аргументов) операцией, то есть константой e, представляющей нейтральный элемент, одноместной операцией взятия обратного элемента и ассоциативной двухместной операцией.

Группа называется абелевой, если ее двухместная операция обладает свойством коммутативности, то есть для всех $a, b \in A$ выполняется равенство $a*b = b*a$. Для абелевой группы обычно используют аддитивную форму записи: коммутативная и ассоциативная двухместная операция обозначается знаком «$+$», нейтральный элемент – 0, а обратный элемент называется противоположным и обозначается $-a$.

Алгебра $\langle R, +, \cdot \rangle$ с двумя двухместными операциями называется кольцом, если $\langle R, + \rangle$ является абелевой группой, а умножение дистрибутивно относительно сложения, то есть для всех $a, b, c \in A$ выполняются равенства $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ и $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$. Для абелевой группы $\langle R, + \rangle$ естественна аддитивная форма записи: $a + 0 = a$, $a + (-a) = 0$. Из дистрибутивности логически следуют следующие свойства операции умножения в кольце: $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$, $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$. Любую абелеву группу в аддитивной форме записи можно тривиальным образом превратить в кольцо, добавив умножение по правилу $x \cdot y = 0$. Такое кольцо называется нулевым кольцом.

Если операция умножения в кольце обладает свойством ассоциативности или коммутативности, то кольцо называется ассоциативным или коммутативным соответственно. Если для умножения имеется нейтральный элемент $1 \neq 0$, то говорят кольцо с единицей. Ассоциативное кольцо с единицей называется целостным, если в нем отсутствуют делители нуля, то есть не существует двух элементов $a \neq 0$, $b \neq 0$ таких, что $a \cdot b = 0$. Если каждый ненулевой элемент целостного кольца имеет обратный (по умножению), то эта алгебра называется тело. Коммутативное тело называется поле.

Другим важным частным случаем полугрупп являются полурешетки. Полурешетка – это алгебра с одной двухместной операцией, которая ассоциативна, коммутативна и идемпотентна, то есть для любого элемента $a * a = a$.

Примеры разных алгебр содержатся в учебниках [1, 3].

Когда задано множество и какое-то действие с его элементами, то сначала надо проверить, что это операция. Это означает проверку определенности операции для всех элементов множества и проверку того, что результат операции снова принадлежит тому же множеству. Потом проверяются нужные по условию свойства операций.

В случае конечного основного множества алгебры $A = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ двухместную операцию можно задать так называемой таблицей Кэли, где на пересечении строки a_i и столбца a_j записывается результат операции $a_i * a_j$.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
* & a_1 & \cdots & a_j & \cdots & a_n \\
\hline
a_1 & & \cdots & & \cdots & \\
\vdots & & & \vdots & & \\
a_i & & \cdots & a_i * a_j & \cdots & \\
\vdots & & & \vdots & & \\
a_n & & \cdots & & \cdots &
\end{array}
$$

По такой таблице легко проверяется коммутативность, наличие нейтрального элемента, существование обратных, идемпотентность. А вот проверка ассоциативности сводится к рассмотрению всех возможных троек (не обязательно разных) элементов. Их количество равно n^3, где $n = |A|$. При наличии нейтрального элемента рассматривают только тройки без него, потому что если e является нейтральным, то выполняются равенства

$$
\begin{aligned}
(e * b) * c = b * c = e * (b * c) \\
(b * e) * c = b * c = b * (e * c) \\
(b * c) * e = b * c = b * (c * e)
\end{aligned}
$$

Если для всех рассматриваемых троек выполнено свойство ассоциативности, то операция будет ассоциативной. Если хотя бы для одной тройки $a, b, c \in A$ выяснится, что $a * (b * c) \neq (a * b) * c$, то операция не ассоциативна.

1.1. Задачи

Дано множество A и двухместная операция. Проверить, что результат операции всегда принадлежит тому же множеству. Если это верно, то ответить на вопросы:

- Является ли операция ассоциативной, коммутативной, идемпотентной?
- Существует ли нейтральный элемент?
- Является ли данная алгебра полугруппой, группой, абелевой группой, полурешеткой?

№	A	$*$
1.1	$\{a,b,c,d\}$	$\begin{array}{c\|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & c & d \\ b & b & a & d & c \\ c & c & d & a & b \\ d & d & c & b & a \end{array}$
1.2	$\mathbb{Z}$	$x * y = \min(x,y)$
1.3	матрицы вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $a,b,c \in \mathbb{R}$	умножение матриц
1.4	$\{a,b,c,d\}$	$\begin{array}{c\|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & c & d \\ b & b & a & d & c \\ c & c & d & b & a \\ d & d & c & a & b \end{array}$
1.5	$\mathbb{N}$	$x * y = \text{НОД}(x,y)$
1.6	матрицы вида $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$	умножение матриц
1.7	$\{a,b,c,d\}$	$\begin{array}{c\|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & c & d \\ b & b & c & d & a \\ c & c & d & a & b \\ d & d & a & b & c \end{array}$
1.8	$\mathbb{Z}$	$x * y = \max(x,y)$
1.9	матрицы вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a,b \in \mathbb{R}$	умножение матриц
1.10	$\{a,b,c,d\}$	$\begin{array}{c\|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & a & d & d & d \\ b & d & b & d & d \\ c & d & d & c & d \\ d & d & d & d & d \end{array}$
1.11	$\mathbb{N}$	$x * y = \text{НОК}(x,y)$
1.12	матрицы вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$	умножение матриц

<table>
<tr><th>№</th><th>A</th><th>$*$</th></tr>
<tr><td>1.13</td><td>$\{a, b, c, d\}$</td><td>$\begin{array}{c|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & a & a & a & a \\ b & a & b & b & b \\ c & a & b & c & c \\ d & a & b & c & d \end{array}$</td></tr>
<tr><td>1.14</td><td>$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$</td><td>$x * y = x \cap y$</td></tr>
<tr><td>1.15</td><td>матрицы вида $\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$</td><td>умножение матриц</td></tr>
<tr><td>1.16</td><td>$\{a, b, c, d\}$</td><td>$\begin{array}{c|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & a & c & c & a \\ b & c & b & c & b \\ c & c & c & c & c \\ d & a & b & c & d \end{array}$</td></tr>
<tr><td>1.17</td><td>$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$</td><td>$x * y = x \cup y$</td></tr>
<tr><td>1.18</td><td>матрицы вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$</td><td>умножение матриц</td></tr>
<tr><td>1.19</td><td>$\{a, b, c, d\}$</td><td>$\begin{array}{c|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & c & c \\ b & b & b & b & b \\ c & c & b & c & c \\ d & c & b & c & d \end{array}$</td></tr>
<tr><td>1.20</td><td>$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$</td><td>$x * y = x \cap y$</td></tr>
<tr><td>1.21</td><td>матрицы вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$</td><td>умножение матриц</td></tr>
<tr><td>1.22</td><td>$\{a, b, c, d\}$</td><td>$\begin{array}{c|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & d & c & b & a \\ b & c & d & a & b \\ c & b & a & d & c \\ d & a & b & c & d \end{array}$</td></tr>
<tr><td>1.23</td><td>$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$</td><td>$x * y = x \cup y$</td></tr>
<tr><td>1.24</td><td>матрицы вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$</td><td>умножение матриц</td></tr>
</table>

№	A	$*$
1.25	$\{a,b,c,d\}$	$\begin{array}{c\|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & c & d & b & a \\ b & d & c & a & b \\ c & b & a & d & c \\ d & a & b & c & d \end{array}$
1.26	$\{\emptyset,\{a\},\{a,b\}\}$	$x * y = x \cap y$
1.27	$\{a,b,c,d\}$	$\begin{array}{c\|cccc} * & a & b & c & d \\ \hline a & b & c & d & a \\ b & c & d & a & b \\ c & d & a & b & c \\ d & a & b & c & d \end{array}$
1.28	$\{\emptyset,\{a\},\{a,b\}\}$	$x * y = x \cup y$
1.29	$\{a,b,c,d,f\}$	$\begin{array}{c\|ccccc} * & a & b & c & d & f \\ \hline a & a & b & c & d & f \\ b & b & d & a & f & c \\ c & c & f & d & b & a \\ d & d & a & f & c & b \\ f & f & c & b & a & d \end{array}$
1.30	$\{a,b,c\}$	$\begin{array}{c\|ccc} * & a & b & c \\ \hline a & a & c & a \\ b & c & b & b \\ c & a & b & c \end{array}$

Задано множество A с операциями сложения и умножения. Проверить, что эта алгебра является кольцом. Если это кольцо, то ответить на вопросы:

- Будет ли оно ассоциативным, коммутативным, с единицей?
- Является ли это кольцо целостным, телом, полем?

№	A
1.31	$\{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$
1.32	$\{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$
1.33	матрицы вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$
1.34	$\{a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$
1.35	матрицы вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{Z}$
1.36	$\{a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
1.37	$\{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$
1.38	матрицы вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{Q}$
1.39	$\{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$
1.40	$\{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

1.2. Упражнения

Дано множество A и двухместная операция. Считая, что эта алгебра является группой, составить таблицу Кэли, найти все ее подгруппы, указать какие подгруппы являются нормальными.

№	A	$*$
1.41	$\{1, 5, 7, 11\}$	$x * y = x \cdot y \pmod{12}$
1.42	перестановки множества $\{1, 2, 3\}$	композиция
1.43	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$	$x * y = x + y \pmod{6}$
1.44	$\{e, a, a^2, a^3, b, ba, ba^2, ba^3\}$	$a^4 = e, b^2 = e, baba = e,$
1.45	$\{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$	$x * y = x \cdot y \pmod{30}$
1.46	четные перестановки множества $\{1, 2, 3, 4\}$	композиция
1.47	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$	$x * y = x + y \pmod{8}$
1.48	$\{e, a, b, c, d, da, db, dc\}$	$a^2 = b^2 = c^2 = cab = d, d^2 = e$

Составить таблицы сложения и умножения заданного кольца, найти все его идеалы.

1.49. Кольцо вычетов $\mathbb{Z}_4$.

1.50. Поле Галуа $GF(5)$.

1.51. Кольцо вычетов $\mathbb{Z}_6$.

1.52. Поле Галуа $GF(4)$.

1.3. Примеры решения заданий

Дано множество A и двухместная операция. Проверить, что результат операции всегда принадлежит тому же множеству. Если это верно, то ответить на вопросы:

- Является ли операция ассоциативной, коммутативной, идемпотентной?
- Существует ли нейтральный элемент?
- Является ли данная алгебра полугруппой, группой, абелевой группой, полурешеткой?

Пример 1.1. $A = \{e, a, b\}$,

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	e
b	b	e	e

Из таблицы видим, что результат операции всегда лежит в $A = \{e, a, b\}$ и e – нейтральный элемент (соответствующие строка и столбец совпадают с заголовками таблицы Кэли). Симметрия относительно главной диагонали свидетельствует о коммутативности операции.

Так как $a * a = e \neq a$, то эта операция не идемпотентна. Проверим ассоциативность. $a * (a * b) = a * e = a$, но $(a * a) * b = e * b = b$. Так как $a * (a * b) \neq (a * a) * b$, то операция не ассоциативна. Следовательно, эта алгебра не является полугруппой и тем более не является ни группой, ни полурешеткой.

Пример 1.2. $A = \{a, b, c, d\}$,

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	a	c
c	c	a	d	b
d	d	c	b	a

Из таблицы видим, что результат операции всегда лежит в $A = \{a, b, c, d\}$ и a – нейтральный элемент (соответствующие строка и столбец совпадают с заголовками таблицы Кэли). Симметрия относительно главной диагонали свидетельствует о коммутативности операции.

Так как $b * b = d \neq b$, то эта операция не идемпотентна. Проверим ассоциативность для троек элементов, не включающих нейтральный элемент a. В силу коммутативности $x*(x*x) = (x*x)*x$, $x*(y*x) = x*(x*y) = (x*y)*x$, из $x*(y*y) = (x*y)*y$ следует $y*(y*x) = y*(x*y) = (x*y)*y = x*(y*y) = (y*y)*x$, а из $x*(y*z) = (x*y)*z$ следует $z*(y*x) = (z*y)*x$. Значит, достаточно проверить 9 троек вместо 27.

$$
\begin{aligned}
b*(b*c) = b*a = b &= d*c = (b*b)*c,\\
b*(b*d) = b*c = a &= d*d = (b*b)*d,\\
c*(c*b) = c*a = c &= d*b = (c*c)*b,\\
c*(c*d) = c*b = a &= d*d = (c*c)*d,\\
d*(d*b) = d*c = b &= a*b = (d*d)*b,\\
d*(d*c) = d*b = c &= a*c = (d*d)*c,\\
b*(c*d) = b*b = d &= a*d = (b*c)*d,\\
c*(b*d) = c*c = d &= a*d = (c*b)*d,\\
c*(d*b) = c*c = d &= b*b = (c*d)*b.
\end{aligned}
$$

Таким образом, операция ассоциативна и алгебра является полугруппой. Так как в каждой строке и в каждом столбце все элементы встречаются по одному разу, то у каждого есть обратный элемент. Итак, данная алгебра является абелевой группой.

Пример 1.3. $A = \mathbb{N}$, $x * y = \min(x, y)$.

По определению $\min(x,y) = \begin{cases} x, & \text{если } x \le y \\ y, & \text{если } x \ge y \end{cases}$

Значит, результат операции совпадает с одним из аргументов и принадлежит $\mathbb{N}$.

Если $x \le \min(y, z)$, то $x \le y$ и $x \le z$. Следовательно, $x*(y*z) = x = x*z = (x*y)*z$. Если $x \ge \min(y,z)$, то $x*(y*z) = y*z$. Рассмотрим два случая:

$$
\begin{aligned}
y \le z \quad &\Rightarrow \quad y*z = y; y \le x; (x*y)*z = y*z\\
y \ge z \quad &\Rightarrow \quad y*z = z; z \le x; z \le \min(x,y); (x*y)*z = z
\end{aligned}
$$

В обоих случаях ассоциативность доказана. Эта алгебра является полугруппой. Кроме того, $\min(y, x) = \min(x, y)$ и $\min(x, x) = x$. Операция коммутативна и идемпотентна. Это – полурешетка.

Пример 1.4. $A = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, $x * y = x \cap y$.

Так как $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset \notin A$, то данное действие не является операцией на множестве A.

Пример 1.5. $A = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, $x * y = x \cup y$.

Известно, что объединение множеств коммутативно и идемпотентно. Найдем результат операции для пар различных элементов. Из $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \in A$, $\{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b\} \in A$, $\{b\} \cup \{a, b\} = \{a, b\} \in A$ следует, что объединение является операцией на множестве A. Так как $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$, то операция ассоциативна. Эта алгебра является полугруппой. Более того, это – полурешетка.

Задано множество A с операциями сложения и умножения. Проверить, что эта алгебра является кольцом. Если это кольцо, то ответить на вопросы:

- Будет ли оно ассоциативным, коммутативным, с единицей?
- Является ли это кольцо целостным, телом, полем?

Пример 1.6. $A = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Пусть $c_1 = a_1 + b_1\sqrt{2}$, $c_2 = a_2 + b_2\sqrt{2}$. Тогда $c_1 + c_2 = a_1 + b_1\sqrt{2} + a_2 + b_2\sqrt{2} = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{2}$. Ясно, что $(a_1 + a_2), (b_1 + b_2) \in \mathbb{Q}$ и $c_1 + c_2 \in A$. Далее, $c_1 \cdot c_2 = a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2\sqrt{2} + b_1\sqrt{2} \cdot a_2 + b_1\sqrt{2} \cdot b_2\sqrt{2} = (a_1 \cdot a_2 + 2 \cdot b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)\sqrt{2}$. Ясно, что $(a_1 \cdot a_2 + 2 \cdot b_1 \cdot b_2), (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \in \mathbb{Q}$ и $c_1 \cdot c_2 \in A$. Известно, что сложение чисел ассоциативно, коммутативно и имеет нейтральный элемент $0 = 0 + 0 \cdot \sqrt{2}$. Противоположным к $a + b\sqrt{2}$ будет элемент $(-a) + (-b)\sqrt{2}$. Итак $\langle A, + \rangle$ является абелевой группой.

Умножение чисел дистрибутивно относительно сложения, поэтому A является кольцом, причем оно ассоциативно и коммутативно. Единицей этого кольца будет $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{2}$. Для ненулевого элемента $a + b\sqrt{2}$ обратным будет $\dfrac{a}{a^2 - 2b^2} + \dfrac{-b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}$. Из иррациональности числа $\sqrt{2}$ следует, что $a^2 - 2b^2 \neq 0$, поэтому все ненулевые элементы A обратимы. Это кольцо является полем.

Глава 2

Матрицы

Матрицей порядка $m \times n$ называется прямоугольная таблица из элементов поля, состоящая из m строк и n столбцов. Мы рассмотрим только поле вещественных чисел, т. е. элементы матрицы являются числами: $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Матрица A порядка $m \times n$ с элементами a_{ij} подробно запишется в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим строку матрицы A с номером i через $\vec{A}_i$, столбец матрицы с номером j через $A_j^{\downarrow}$. Можно получить краткую запись матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \vec{A}_1 \\ \vec{A}_2 \\ \vdots \\ \vec{A}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^{\downarrow} & A_2^{\downarrow} & \dots & A_n^{\downarrow} \end{pmatrix} = (a_{ij}),$$

где $i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$.

Матрицы порядка $n \times n$ называют квадратными матрицами.

Нулевой матрицей $O_{m \times n}$ называется прямоугольная матрица, все элементы которой равны нулю. Единичной матрицей $E_{n \times n}$ называется квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю.

$$E_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, O_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Суммой матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называется матрица $C = (c_{ij})$, в которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, где $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. Обозначение: $A + B = C$.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число k называется матрица $B = (b_{ij})$, в которой $b_{ij} = k\,a_{ij}$, где $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. Обозначение: $kA = B$.

Транспонированием матрицы $A = (a_{ij})$ называется преобразование матрицы A в матрицу $A^T = (a_{j\,i})$ для любых $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. При транспонировании матрицы ее строки и столбцы меняются ролями.

Для любых чисел k_1, k_2, матриц A,B и нулевой матрицы O выполняются равенства:

$$(k_1 k_2)A = k_1(k_2 A),$$

$$A(k_1 k_2) = (A k_1)k_2,$$

$$(k_1 + k_2)A = k_1 A + k_2 A,$$

$$k_1(A + B) = k_1 A + k_1 B,$$

$$(k_1 A)k_2 = k_1(A k_2),$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T,$$

$$(k_1 A)^T = k_1 A^T,$$

$$0 \cdot A = O \cdot k_1 = O.$$

Доказательство равенств оставляется в качестве упражнения.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{m\times s}$ на матрицу $B = (b_{ij})_{s\times n}$ называется матрица $C = (c_{ij})_{m\times n}$, в которой $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj}$, где $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. Обозначение $A \cdot B = AB = C$. Следовательно, для нахождения элемента c_{ij} нужно все элементы i-й строки матрицы A умножить на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B и результат сложить. Правило умножения матриц можно записать:

$$AB=\begin{pmatrix} \vec{A}_1 \\ \vec{A}_2 \\ \vdots \\ \vec{A}_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1^{\downarrow} & B_2^{\downarrow} & \dots & B_n^{\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{A}_1 \cdot B_1^{\downarrow} & \vec{A}_1 \cdot B_2^{\downarrow} & \dots & \vec{A}_1 \cdot B_n^{\downarrow} \\ \vec{A}_2 \cdot B_1^{\downarrow} & \vec{A}_2 \cdot B_2^{\downarrow} & \dots & \vec{A}_2 \cdot B_n^{\downarrow} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{A}_m \cdot B_1^{\downarrow} & \vec{A}_m \cdot B_2^{\downarrow} & \dots & \vec{A}_m \cdot B_n^{\downarrow} \end{pmatrix}.$$

Замечание. Умножать матрицу A на матрицу B можно, если число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B.

Теорема. Для любых матриц A, B, C и единичной матрицы E соответствующих размеров выполняются равенства:

$$(AB)C = A(BC),$$

$$A(B + C) = AB + AC,$$
$$(A + B)C = AC + BC,$$
$$(AB)^T = B^T A^T,$$
$$AE = EA = A,$$
$$AO = OA = O.$$

Доказательство в [1, с. 105–106].

Определителем квадратной матрицы A порядка n называется число, равное алгебраической сумме $n!$ произведений, вида: $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$, где индексы $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ составляют некоторую перестановку из чисел $1, 2, \dots, n$. Произведение берется со знаком плюс, если его индексы составляют четную перестановку, и со знаком минус – в противоположном случае.

Обозначание:

$$\mid A \mid \; = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \mathrm{det} A.$$

Пусть δ – функция четности на множестве перестановок, тогда

$$\mid A \mid \; = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)} \delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n},$$

где суммирование ведется по всем перестановам $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ из чисел $1, 2, \ldots, n$.

Свойства определителей.

1. Определитель не меняется при транспонировании.

2. Общий множитель элементов какой-либо строки можно вынести за знак определителя.

3. Если одна из строк определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.

4. Определитель, содержащий две одинаковые строки, равен нулю.

5. Если одна из строк определителя есть линейная комбинация его других строк, то определитель равен нулю.

6. Если в матрице A поменять местами две строки, то определитель полученной матрицы B будет равен определителю матрицы A, взятому с противоположным знаком.

7. Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю.

8. Если s-я строка $\vec{A}_s$ матрицы A представляется в виде суммы двух слагаемых $\vec{A}'_s + \vec{A}''_s$, то определитель матрицы A равен сумме определителей матриц A' и A'', полученных из A заменой s-й строки соответственно строками $\vec{A}'_s$, $\vec{A}''_s$: $\mid A \mid \; = \mid A' \mid + \mid A'' \mid$.

9. Определитель не меняется, если к элементам одной из его строк прибавляются соответственные элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

10. Определитель матрицы не меняется, если к одной из его строк прибавляется любая линейная комбинация других строк.

11. Если $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ – произвольная перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$ и

$$A' = \begin{pmatrix} a_{\alpha_1 1} & a_{\alpha_1 2} & \ldots & a_{\alpha_1 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\alpha_n 1} & a_{\alpha_n 2} & \ldots & a_{\alpha_n n} \end{pmatrix},$$

то $\mid A' \mid = \delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) \mid A \mid$.

При вычислении определителей справедливы равенства:

$$\mid A^n \mid = \mid A \mid^n, \ \mid kA \mid = k^n \mid A \mid, \ \mid AB \mid = \mid A \mid \cdot \mid B \mid.$$

Доказательство в [1, с. 110–117].

Пусть дан определитель порядка n, число k, удовлетворяющее условию $1 \leqslant k \leqslant n-1$, в определителе выбираем произвольные k строк и k столбцов. Определитель матрицы, составленной из элементов, стоящих на пересечении этих строк и столбцов, называется минором k-го порядка данного определителя.

Обозначение: $M_A \begin{pmatrix} i_1, & \dots & , i_k \\ j_1, & \dots & , j_k \end{pmatrix}$. Выбрали k строк с номерами $i_1, \dots, i_k$ и k столбцов с номерами $j_1, \dots, j_k$. Из определения видно, что

$$M_A \begin{pmatrix} i_1, & \dots & , i_k \\ j_1, & \dots & , j_k \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}.$$

Дополнительным минором для минора M_A квадратной матрицы A называется определитель, матрицы, полученной из A вычеркиванием строк с номерами $i_1, \dots, i_k$ и столбцов с номерами $j_1, \dots, j_k$. Обозначение: $CM_A \begin{pmatrix} i_1, & \dots & , i_k \\ j_1, & \dots & , j_k \end{pmatrix}$.

Алгебраическим дополнением для минора M_A квадратной матрицы A называется его дополнительный минор, умноженный на $(-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k}$. Обозначение: $\overline{CM_A} \begin{pmatrix} i_1, & \dots & , i_k \\ j_1, & \dots & , j_k \end{pmatrix}$.

Получаем

$$\overline{CM_A} \begin{pmatrix} i_1, & \dots & , i_k \\ j_1, & \dots & , j_k \end{pmatrix} = (-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k} CM_A \begin{pmatrix} i_1, & \dots & , i_k \\ j_1, & \dots & , j_k \end{pmatrix}.$$

Теорема Лапласа. Пусть в определителе $\mid A \mid$ порядка n произвольно выбраны k строк (или k столбцов), $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Тогда сумма произведений всех миноров k-го порядка, содержащиеся в выбранных строках (столбцах), на их алгебраические дополнения равна определителю $\mid A \mid$.

$$\mid A \mid = \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n} M_A \begin{pmatrix} i_1, & \dots & , i_k \\ j_1, & \dots & , j_k \end{pmatrix} \cdot \overline{CM_A} \begin{pmatrix} i_1, & \dots & , i_k \\ j_1, & \dots & , j_k \end{pmatrix}.$$

Следствие. Сумма произведений всех элементов любой строки (любого столбца) матрицы A на их алгебраические дополнения равна определителю матрицы A. Сумма произведений всех элементов любой строки (любого столбца) матрицы на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (другого столбца) этой же матрицы равна нулю. Получаем

$$| A |= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$

$$| A |= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, \quad j = 1, 2, , \ldots, n;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = 0, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n, i \neq k;$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = 0, \quad j, k = 1, 2, \ldots, n, j \neq k,$$

где A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij} данной матрицы. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} вычисляется следующим образом:

1. Находим минор элемента a_{ij}, т.е. минор $(n-1)$-го порядка, получающийся из исходного определителя вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Обозначение: M_{ij}.

2. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Квадратная матрица A называется невырожденной, если $| A |\neq 0$, в противном случае матрица называется вырожденной.

Матрицей, присоединенной к матрице A, называется матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A, если выполняется условие

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A.

Теорема. Всякая невырожденная матрица имеет обратную.

Обратная матрица находится по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\mid A \mid} A^{*} = \frac{1}{\mid A \mid} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Свойства обратной матрицы:

$$\mid A^{-1} \mid = \frac{1}{\mid A \mid};$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1};$$

$$(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}.$$

Системой линейных уравнений, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где числа a_{ij}, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ называются коэффициентами системы, числа b_i – свободными членами, x_j – неизвестными.

В матричном виде система линейных уравнений записыватся в виде: $AX = B$. Здесь A – матрица системы, X – вектор-столбец неизвестных, B – вектор-столбец свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Решением системы линейных уравнений называется упорядоченный набор из n чисел, при подстановке которых вместо неизвестных в систему все уравнения системы обращаются в верные равенства.

Система линейных уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если она имеет более одного решения.

Исследовать систему линейных уравнений – значит выяснить, совместна она или нет. Если совместна, то найти ее решение.

Решение невырожденных систем линейных уравнений средствами матричного исчисления. Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

или в матричной форме: $AX = B$.

Матрица A системы квадратная, определитель этой матрицы называется определителем системы линейных уравнений. Если определитель системы отличен от нуля, то система линейных уравнений называется невырожденной. В этом случае решение находится по формуле:

$$X = A^{-1}B.$$

Этот способ решения называют матричным способом решения систем линейных уравнений. Существуют другие способы решений систем линейных уравнений [5, с. 21-33].

Решение матричных уравнений (A, B, X – матрицы соответствующих размерностей):

$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$,
$XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$,
$AX + B = kC \Rightarrow X = A^{-1}(kC - B)$,
$XA + B = kC \Rightarrow X = (kC - B)A^{-1}$.

2.1. Задачи

Решите систему уравнений средствами матричного исчисления

2.1 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 7, \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -3; \end{cases}$ 2.2 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 17, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -15; \end{cases}$

2.3 $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7, \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 14, \\ 5x_1 + 9x_2 + 11x_3 = 12; \end{cases}$

2.4 $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 8x_3 = 18, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = -6; \end{cases}$

2.5 $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 26, \\ 7x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 23, \\ 8x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 11; \end{cases}$

2.6 $\begin{cases} -2x_1 - x_2 - 5x_3 = -29, \\ 7x_1 \qquad\qquad + x_3 = 46, \\ -5x_1 - 2x_2 + 7x_3 = -8; \end{cases}$

2.7 $\begin{cases} 9x_1 - 2x_2 + 24x_3 = 49, \\ 2x_1 - x_2 + 12x_3 = 27, \\ 3x_1 - 5x_2 + 48x_3 = 118; \end{cases}$

2.8 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 4, \\ 9x_1 + 36x_2 + 16x_3 = 64; \end{cases}$

2.9 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -1, \\ 4x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 22; \end{cases}$

2.10 $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = -3, \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4, \\ 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 6; \end{cases}$

2.11 $\begin{cases} x_1 + 12x_2 + 19x_3 = 60, \\ -14x_1 + x_2 + 17x_3 = 9, \\ -19x_1 - 13x_2 + x_3 = -54; \end{cases}$

2.12 $\begin{cases} 10x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 50, \\ 5x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -5, \\ 12x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 230; \end{cases}$

2.13 $\begin{cases} 1{,}4x_1 + 3{,}2x_2 + 6{,}1x_3 = -39, \\ 10x_1 + 5x_2 + 15x_3 = -100, \\ 12x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 22; \end{cases}$

2.14 $\begin{cases} 23x_1 + 25x_2 + 27x_3 = 37, \\ -x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 3; \end{cases}$

2.15 $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 25x_3 = 23, \\ x_1 + 7x_2 + 49x_3 = 13, \\ x_1 + 8x_2 + 64x_3 = 5; \end{cases}$

2.16 $\begin{cases} -2x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 37, \\ -5x_1 + x_2 - x_3 = -36, \\ -4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -18; \end{cases}$

2.17 $\begin{cases} 12x_1 + 11x_2 + 10x_3 = -4, \\ 9x_1 + 15x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 8x_2 \qquad\quad = 5; \end{cases}$

2.18 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4, \\ 4x_1 + 8x_2 + 8x_3 = 4, \\ 6x_1 + 9x_2 + 10x_3 = 11; \end{cases}$

2.19 $\begin{cases} \qquad -2x_2 + 2x_3 = 4, \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 21, \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 3; \end{cases}$

2.20 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 20; \end{cases}$

2.21 $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -26, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 28, \\ 2,5x_1 - 2x_2 + x_3 = -3; \end{cases}$

2.22 $\begin{cases} 13x_1 + x_2 + 2x_3 = -10, \\ x_1 + 11x_2 - 3x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 2; \end{cases}$

2.23 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 8, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9; \end{cases}$

2.24 $\begin{cases} 4x_1+5x_2-2x_3=1, \\ 2x_1+7x_2-3x_3=-2, \\ 3x_1+x_2+2x_3=0; \end{cases}$

2.25 $\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3=-5, \\ x_1+2x_2-3x_3=-1, \\ 2x_1-x_2+x_3=-5; \end{cases}$

2.26 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+2x_2+3x_3=0, \\ x_1+4x_2+9x_3=-4; \end{cases}$

2.27 $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3=-5, \\ x_1+2x_2-2x_3=2, \\ 3x_1+x_2-4x_3=-2; \end{cases}$

2.28 $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2, \\ x_1+2x_2+2x_3=1, \\ 3x_1+x_2+4x_3=0; \end{cases}$

2.29 $\begin{cases} 3x_1-3x_2+2x_3=1, \\ 4x_1-5x_2+3x_3=1, \\ 5x_1-6x_2+4x_3=3; \end{cases}$

2.30 $\begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3=0, \\ x_1+2x_2+x_3=-1, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=1; \end{cases}$

2.31 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8, \\ x_1+x_2+3x_3=12, \\ \qquad x_2+x_3=5; \end{cases}$

2.32 $\begin{cases} -4x_1-3x_2+x_3=5, \\ x_1-2x_2+2x_3=-1, \\ 3x_1+2x_2-x_3=4; \end{cases}$

2.33 $\begin{cases} 7x_1+3x_2-x_3=29, \\ x_1-2x_2+x_3=-14, \\ -4x_1+2x_2-x_3=11; \end{cases}$

2.34 $\begin{cases} 4x_1+3x_2-x_3=17, \\ -2x_1-x_2+4x_3=-4, \\ 2x_1+x_2-6x_3=2; \end{cases}$

2.35 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=13, \\ 2x_1-x_2-x_3=-3, \\ x_1+3x_2+4x_3=18; \end{cases}$

2.36 $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1+2x_2-x_3=0, \\ x_1-x_2+x_3=12; \end{cases}$

2.37 $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=2, \\ 2x_1-3x_2+7x_3=7, \\ 3x_1-4x_2+5x_3=6; \end{cases}$

2.38 $\begin{cases} x_1+2x_2 \qquad =10, \\ 3x_1+2x_2+x_3=23, \\ \qquad x_2+2x_3=13; \end{cases}$

2.39 $\begin{cases} 4x_1+3x_2-x_3=14, \\ -2x_1-x_2+4x_3=-3, \\ 5x_1+3x_2-2x_3=16; \end{cases}$

2.40 $\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3=5, \\ 3x_1+2x_2+3x_3=8, \\ -2x_1+3x_2+6x_3=7. \end{cases}$

2.2. Упражнения

Решите матричные уравнения

2.41 $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -7 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

2.42 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$

2.43 $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$

2.44 $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ -3 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & 22 \end{pmatrix}.$

2.45 $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & -1 \\ 17 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$

2.46 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 13 \\ -1 & 0 & 5 \\ 5 & 13 & 20 \end{pmatrix}.$

2.47 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$

2.48 $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & -16 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

2.49 $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$

2.50 $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ -3 & -2 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$

2.3. Примеры решения заданий

Пример 2.1. Вычислить произведение матриц:
$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \\ -8 & 7 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 2 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$

$AB = \begin{pmatrix} \vec{A}_1 \\ \vec{A}_2 \\ \vec{A}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1^{\downarrow} & B_2^{\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{A}_1 \cdot B_1^{\downarrow} & \vec{A}_1 \cdot B_2^{\downarrow} \\ \vec{A}_2 \cdot B_1^{\downarrow} & \vec{A}_2 \cdot B_2^{\downarrow} \\ \vec{A}_3 \cdot B_1^{\downarrow} & \vec{A}_3 \cdot B_2^{\downarrow} \end{pmatrix}.$

$\vec{A}_1 = (2, 3, 1)$, $\vec{A}_2 = (3, 5, -2)$, $\vec{A}_1 = (-8, 7, 5)$,

$B_1^{\downarrow} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, B_2^{\downarrow} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \\ -8 & 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 2 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot (-6) + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-4) + 1 \cdot (-2) \\ 3 \cdot (-6) + 5 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 & 3 \cdot 5 + 5 \cdot (-4) + (-2) \cdot (-2) \\ (-8) \cdot (-6) + 7 \cdot 2 + 5 \cdot 3 & (-8) \cdot 5 + 7 \cdot (-4) + 5 \cdot (-2) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -14 & -1 \\ 77 & -78 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.2. Решить систему линейных уравнений средствами матричного исчисления

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение. Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

В матричном виде система запишется как $AX = B$. Найдем определитель системы:

$$|\ A\ | = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 \cdot 3 + (-1) \cdot (-5) \cdot 1 -$$

$-1\cdot 2\cdot 1-2\cdot(-5)\cdot 3-(-1)\cdot 3\cdot(-2)=-8+9+5-2+30-6=28,$

Для нахождения обратной матрицы сначала выпишем алгебраические дополнения:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&-5\\3&-2\end{vmatrix}=14,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}-1&1\\3&-2\end{vmatrix}=1,\quad A_{31}=\begin{vmatrix}-1&1\\2&-5\end{vmatrix}=3,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}3&-5\\1&-2\end{vmatrix}=1,\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}2&1\\1&-2\end{vmatrix}=-5,\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}2&1\\3&-5\end{vmatrix}=13,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}3&2\\1&3\end{vmatrix}=11,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}2&-1\\1&3\end{vmatrix}=-7,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}2&-1\\3&2\end{vmatrix}=7.$$

Получаем обратную матрицу

$$A^{-1}=\frac{1}{|\,A\,|}\cdot\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{28}\begin{pmatrix}14&1&3\\1&-5&13\\11&-7&7\end{pmatrix}.$$

Теперь найдем неизвестные:

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{28}\begin{pmatrix}14&1&3\\1&-5&13\\11&-7&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{28}\begin{pmatrix}13\\47\\21\end{pmatrix}.$$

Решением системы линейных уравнений являются числа

$$x_1=\frac{13}{28},\ x_2=\frac{47}{28},\ x_3=\frac{3}{4}.$$

Проверка:

$$\begin{cases}2\cdot\dfrac{13}{28}-\dfrac{47}{28}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{26-47+21}{28}=0,\\[2mm] 3\cdot\dfrac{13}{28}+2\cdot\dfrac{47}{28}-5\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{39+94-105}{28}=1,\\[2mm] \dfrac{13}{28}+3\cdot\dfrac{47}{28}-2\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{13+141-42}{28}=4.\end{cases}$$

Пример 2.3. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}5&-1&2\\-6&4&6\\-2&0&7\end{pmatrix}.$$

Решение:

Матричное уравнение имеет вид: $AX=B$, решение находится по формуле: $X=A^{-1}B$. Найдем A^{-1}.

$$| A | = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Получаем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем X.

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{| A |} A^* B.$$

$$A^*B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -6 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5 + 6 + (-4) & 1 + (-4) + 0 & -2 + -16 + 14 \\ -10 + (-6) + 4 & 2 + 4 + 0 & -4 + 6 + (-14) \\ 10 + 6 + 2 & -2 + (-4) + 0 & 4 + (-6) + (-7) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ -12 & 6 & -12 \\ 18 & -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$X = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ -12 & 6 & -12 \\ 18 & -6 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.4. Разлагая по строке, вычислить определитель:

$$|\,A\,| = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

Решение: Разложим этот определитель по второй строке. Используем формулу: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

$$|\,A\,| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24} =$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} + 0 - \begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$= -2(3 - 12 - 30 + 20 - 6 + 9) - (15 + 60 + 2 + 4 - 50 + 9) - (-15 - 45 - -1 - 3 + 25 - 9) = 32 - 40 + 48 = 40.$

Пример 2.5. Используя теорему Лапласа, вычислить определитель:

$$|\,A\,| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & 2 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение: Разложим этот определитель по первому и третьему столбцу, так как в них расположены нули.

Выпишем миноры 2-го порядка, находящиеся в этих столбцах.

$$M_A\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5.$$

$$M_A\left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 11.$$

$$M_A\left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 4.$$

Выпишем алгебраические дополнения данных миноров.

$$\overline{CM_A}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) = (-1)^{1+3+1+3} CM_A\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) = (-1)^{1+3+1+3} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 44.$$

$$\overline{CM_A}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) = (-1)^{1+4+1+3} CM_A\left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) = (-1)^{1+4+1+3} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 38.$$

$$\overline{CM_A}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) = (-1)^{3+4+1+3} CM_A\left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) = (-1)^{3+4+1+3} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -17.$$

$$|A| = M_A\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) \cdot \overline{CM_A}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) + M_A\left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) \cdot \overline{CM_A}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) + M_A\left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) \overline{CM_A}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) =$$

$$= (-5) \cdot 44 + 11 \cdot 38 + 4 \cdot (-17) = 130.$$

Глава 3

Многочлены

Выражение вида $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, называется многочленом (или полиномом) от переменной x над полем действительных чисел. Числа $a_0, \dots, a_n$ называются коэффициентами многочлена, а число n – его степенью, если $a_n \neq 0$.

Многочлены нулевой степени – это элементы поля.

Степень многочлена $f(x)$ обозначается через $\deg f(x)$. Многочлены можно складывать и перемножать, причём

$$\deg(f(x) + g(x)) \leqslant max\{\deg f(x), \deg g(x)\},$$

$$\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x).$$

Предложение. Множество многочленов является ассоциативным и коммутативным кольцом с единицей.

Кольцо многочленов обозначается через $\mathbb{R}[x]$.

Замечание. Вместо поля $\mathbb{R}$ в качестве коэффициентов можно взять поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Получим кольцо, которое обозначается через $\mathbb{C}[x]$.

Многочлены $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_kx^k$ и $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_kx^k \in \mathbb{R}[x]$ равны, если $a_k = b_k \quad \forall k = 1, \dots, n$.

Пусть $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_kx^k$ и $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{s} b_kx^k \in \mathbb{R}[x]$ и, например, $n \geqslant s$.

Многочлены $h(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k x^k$ и $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n+s} d_k x^k$ называются суммой и произведением соответственно многочленов $f(x)$ и $g(x)$ и обозначаются:

$$h = f + g,$$

$$p = f \cdot g,$$

если

$$c_k = a_k + b_k, \text{ причем при } n > s,\ b_{s+1}, \ldots, b_n = 0$$

$$d_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j,\ k = 0,\ 1,\ \ldots, n+s.$$

Предложение. Пусть $f(x)$ и $g(x) \in \mathbb{R}[x]$ и $g(x) \not\equiv 0$. Тогда существует единственная пара таких многочленов $q(x)$ и $r(x)$, что $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, $0 \leqslant \deg r(x) < \deg g(x)$.

Многочлен $q(x)$ называется (неполным) частным от деления многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$, а $r(x)$ – остатком. Если $r(x) = 0$, то говорят, что $f(x)$ делится на $g(x)$. В этом случае $g(x)$ называется делителем многочлена $f(x)$, а $q(x)$ – просто частным. В результате имеем:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}.$$

Если многочлен $f(x)$ делится (нацело) на многочлен $g(x)$, то будем это обозначать: $f(x) \vdots g(x)$.

Свойства делимости многочленов.

1) $f(x) \vdots g(x), g(x) \vdots h(x) \Rightarrow f(x) \vdots h(x)$.

2) $f(x) \vdots \varphi(x), g(x) \vdots \varphi(x) \Rightarrow (f(x) \pm g(x)) \vdots \varphi(x)$.

3) $f(x) \vdots \varphi(x) \Rightarrow f(x) \cdot g(x) \vdots \varphi(x), \forall g(x)$.

4) Если $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x) \vdots \varphi(x)$, то на φ делится и многочлен $f_(x) g_1(x) + \cdots + f_k(x) g_k(x)$, где $g_i(x)$ – произвольные многочлены.

5) Всякий многочлен $f(x)$ делится на любой многочлен нулевой степени.

6) $f(x) \vdots \varphi(x) \Rightarrow f(x) \vdots c \cdot \varphi(x), \forall c \neq 0$.

7) Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ одновременно делятся друг на друга $\Leftrightarrow g(x) = cf(x), c \neq 0$.

Деление многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ с остатком выполняется «уголком», данный метод осуществляется следующим образом:

$$\begin{array}{r|l}
f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \cdots & g(x) = b_m x^m + \cdots \\ \cline{2-2}
-(a_n b_m^{-1} x^{n-m} \cdot g(x)) = -(a_n x^n + \cdots) & a_n b_m^{-1} x^{n-m} + \cdots = q(x) \\ \cline{1-1}
f_1(x) \quad & \\
\cdots\cdot & \\
\end{array}$$

$$\overline{r(x)}$$

Пусть

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0,$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots b_1 x + b_0,$$

где $\deg f(x) \geqslant \deg g(x)$ и $a_n, b_m \neq 0$. Рассмотрим многочлен

$$f_1(x) = f(x) - a_n {b_m}^{-1} x^{n-m} g(x).$$

Если $\deg f_1(x) < \deg g(x)$, то

$$q(x) = a_n {b_m}^{-1} x^{n-m}, r(x) = f_1(x).$$

Если $\deg f_1(x) \geqslant \deg g(x)$, то делим $f_1(x)$ на $f(x)$ и т.д. Получим многочлен вида:

$$q(x) = c_{n-m}x^{n-m} + c_{n-m-1}x^{n-m-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

$\deg\left(f(x) - q(x)g(x)\right) < \deg g(x)$. Получили $q(x)$ – неполное частное от деления многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$, а остатком от деления будет многочлен $r(x) = f(x) - q(x)g(x)$.

Значением многочлена $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$ в точке $\alpha \in \mathbb{R}$ называют число, равное

$$f(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots a_1 \alpha + a_0.$$

α – корень многочлена $f(x)$, если $f(\alpha) = 0$.

Теорема Безу. Остаток от деления любого многочлена $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ на двучлен $(x - c) \in \mathbb{R}[x], c \in \mathbb{R}$, равен значению $f(c)$. В частности, $f(x)$ делится на $(x - c)$ тогда и только тогда, когда $f(c) = 0$ (c – корень многочлена).

Доказательство теоремы приведено в [1, с. 179].

Для вычисления частного и остатка от деления многочлена

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

на двучлен $(x - c)$ очень удобно использовать схему Горнера.

Заполняется таблица

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_0
c	$a_n = b_n$	$a_{n-1} + b_n \cdot c = b_{n-1}$	$\cdots$	$a_0 + b_1 \cdot c = b_0$

Верхняя строка которой – это коэффициенты многочлена $f(x)$, коэффициенты нижней строки вычисляются по рекуррентным формулам: $b_n = a_n$, $b_i = a_i + b_{i+1}\, c$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Полученные числа $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1$ являются коэффициентами частного от деления многочлена $f(x)$ на двучлен $(x - c)$, а b_0 – остатком $\Rightarrow b_0 = f(c)$. То есть

$$f(x) = (x - c)(b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + b_2 x + b_1) + b_0.$$

С помощью схемы Горнера можно решать такие типы задач:

1) найти $q(x)$ и r при делении $f(x)$ на $(x - c)$;

2) вычислить значение многочлена $f(x)$ при $x = c$;

3) выяснить будет ли $x = c$ корнем многочлена $f(x)$;

4) определить кратность корня;

5) разложить многочлен по степеням $(x - c)$.

Многочлен $\varphi(x)$ называется общим делителем для многочленов $f(x)$ и $g(x)$, если он служит делителем для каждого из этих многочленов.

Наибольшим общим делителем (НОД) отличных от нуля многочленов $f(x)$ и $g(x)$ из $\mathbb{R}[x]$ называется такой многочлен $d(x) \in \mathbb{R}[x]$, который является их общим делителеми, сам делится на любой другой общий делитель этих многочленов.

Обозначение: $\text{НОД}(f(x), g(x)) = (f(x), g(x))$.

Ненулевой многочлен со старшим коэффициентом, равным единице, называют унитарным.

Теорема. Пусть даны два многочлена $f(x)$ и $g(x)$, отличные от нуля, тогда существует единственный унитарный наибольший общий делитель этих многочленов.

Алгоритм Евклида нахождения НОД двух многочленов.

Пусть даны два многочлена $f(x)$ и $g(x)$, отличные от нуля, причем $\deg f(x) \geqslant \deg g(x)$, если $f(x) \vdots g(x)$, то $g(x)$ и есть НОД. В противном случае разделим $f(x)$ с остатком на $g(x)$:

$$f(x) = g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x).$$

После этого разделим $g(x)$ с остатком на $r_1(x)$:

$$g(x) = r_1(x) \cdot q_2(x) + r_3(x).$$

Если $r_2(x) = 0$, то процесс закончен, а если $r_2 \neq 0$, то разделим $r_1(x)$ с остатком на $r_2(x)$:

$$r_1(x) = r_2(x) \cdot q_3(x) + r_3(x).$$

Продолжаем это процесс, пока не получится остаток, равный нулю, так как степени остатков постоянно убывают. Итак, если $r_n(x)$ – последний ненулевой остаток, то $r_{n+1}(x) = 0$ и $(f(x), g(x)) = r_n(x) = d(x)$.

Теорема. Если $(f(x), g(x)) = d(x)$, то существуют такие многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{R}[x]$, что НОД может быть представлен в виде

$$d(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x),$$

причем, если $\deg f(x) > 0$ и $\deg g(x) > 0$, то $u(x), v(x)$ можно выбрать так, что $\deg u(x) < \deg g(x)$, $\deg v(x) < \deg f(x)$.

Доказательство теоремы приведено в [1, с. 184].

Наибольший общий делитель многочленов определяется лишь с точностью до множителя старшей степени. Без потери общности можно считать, что старший коэффициент НОД равен единице.

Многочлены $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ называются взаимно простыми, если $(f(x), g(x)) = 1$.

Теорема. (Критерий взаимной простоты многочленов)

Многочлены $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ взаимно просты тогда и только тогда, когда

$$\exists u(x), v(x) \in \mathbb{R}[x] : \ f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1.$$

Доказательство теоремы остается в качестве упражнения.

Свойства взаимно простых многочленов.

1. $(f(x), g(x)) = 1, (f(x), h(x)) = 1 \Rightarrow (f(x), g(x)h(x)) = 1.$

2. $(f(x), g(x)) = 1, (g(x)h(x)) \vdots f(x) \Rightarrow h(x) \vdots f(x).$

3. $(f(x), g(x)) = 1, h(x) \vdots f(x), h(x) \vdots g(x) \Rightarrow h(x) \vdots (f(x)g(x))$.

4. $(f(x), g(x)) = d(x), d(x) \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{d(x)}, \frac{g(x)}{d(x)}\right) = 1$.

Наименьшим общим кратным (НОК) многочленов $f(x)$ и $g(x)$ из $\mathbb{R}[x]$ называется такой многочлен $k(x) \in \mathbb{R}[x]$, который обладает следующими свойствами:

1) $k(x)$ – общее кратное многочленов $f(x)$, $g(x)$;

2) если $k_1(x)$ – любое общее кратное $f(x)$, $g(x)$, то $k_1(x) \vdots k(x)$.

Обозначение: $\text{НОК}(f(x), g(x))$.

Для нахождения наменьшего общего кратного двух многочленов можно использовать связь между наибольшим общим делителем и наименьшим общим кратным:

$\text{НОД}(f(x), g(x)) \cdot \text{НОК}(f(x), g(x)) = f(x) \cdot g(x)$.

Делитель $d(x) \in \mathbb{R}[x]$ многочлена $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ называется собственным, если $0 < \deg d(x) < \deg f(x)$. В противном случае – несобственным.

Многочлен $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ называется неприводимым в кольце $\mathbb{R}[x]$, если $\deg f(x) > 0$ и $f(x)$ не имеет собственных делителей в $\mathbb{R}[x]$. Многочлен, имеющий собственные делители в $\mathbb{R}[x]$, называется приводимым.

Многочлен нулевой степени и нулевой многочлен не являются ни приводимыми, ни неприводимыми.

Утверждение. Многочлен $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ приводим $\Leftrightarrow$

$$f(x) = g(x) \cdot h(x), \ \deg f(x) > \deg g(x), \ \deg f(x) > \deg h(x).$$

Доказательство очевидно.

Утверждение. Многочлен $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ при $2 \leqslant \deg f(x) \leqslant 3$ неприводим над $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ не имеет корней в $\mathbb{R}$.

Доказательство следует из теоремы Безу.

Следствие. В кольце $\mathbb{R}[x]$ неразложимыми являются многочлены первой степени, а также квадратные трёхчлены

$ax^2 + bx + c, D < 0$.

Теорема. $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ – неприводимый многочлен. Тогда

1) $\forall g(x) \in \mathbb{R}[x] : g(x) \vdots f(x)$ или $(f(x), g(x)) = 1$;

2) $\forall g(x), h(x) \in \mathbb{R}[x] : g(x)h(x) \vdots f(x) \Rightarrow g(x) \vdots f(x)$ или $h(x) \vdots f(x)$;

3) если $g(x) \in \mathbb{R}[x]$ – неприводимый многочлен

$\Rightarrow$ $(f(x), g(x)) = 1$ либо $f(x) = kg(x), k \in \mathbb{R}$.

Теорема. Любой многочлен $f(x)\in\mathbb{R}[x]$ $\deg f(x) > 0$ либо неприводим над $\mathbb{R}$, либо разлагается в произведение неприводимых над $\mathbb{R}$ многочленов. Разложение однозначно с точностью до перестановки множителей.

$$f(x) = a_n(x-\alpha_1)^{n_1}\cdot \ldots \cdot (x-\alpha_k)^{n_k}\cdot \\ \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdot \ldots \cdot (x^2+p_sx+q_s)^{m_s}.$$

Все сомножители попарно различны, $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k$ – различные действительные корни многочлена $f(x)$, $p_i^2 - 4q_i < 0$, $i = 1, 2, \ldots, s$ и $\deg f(x) = n_1 + \ldots + n_k + 2(m_1 + \ldots + m_s)$. Числа n_j, $j = 1, 2, \ldots, k$ называются кратностью корня α_j.

Теорема о рациональных корнях многочлена. Если многочлен $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1x + a_0$ с целыми коэффициентами имеет рациональный корень $x_0 = \dfrac{p}{q}$, то $a_0 \vdots p$ и $a_n \vdots q$.

Доказательство: Пусть число $x_0 = \dfrac{p}{q}$ корень многочлена

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0.$$

Умножим равенство на q^n, получим:

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1p\,q^{n-1} + a_0q^n \Leftrightarrow \\ a_np^n = -q(a_{n-1}p^{n-1} + \cdots a_1p\,q^{n-2} + a_0q^{n-1}).$$

По условию коэффициенты a_i – целые числа $\Rightarrow$ множитель в скобке – целое число $\Rightarrow$ правая и левая часть равенства делится на q. Число p не делится на q , так как иначе дробь была бы сократимой $\Rightarrow$ $a_n \vdots q$. Аналогично доказывается, что $a_0 \vdots p$. Теорема доказана.

Эта теорема позволяет на практике легко находить корни многочлена в том случае, когда все коэффициенты многочлена – целые числа, старший коэффициент равен единице, а корень – рациональное число. Если целое число является корнем многочлена, то оно является делителем свободного члена a_0.

3.1. Задачи

Найдите наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Проверьте путем разложения на множители.

3.1 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$, $g(x) = x^2 + 3x + 2$.

3.2 $f(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$, $g(x) = x^2 - x - 2$.

3.3 $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$, $g(x) = x^2 + 4x + 3$.

3.4 $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$, $g(x) = x^2 - 2x - 3$.

3.5 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$, $g(x) = 2x^2 + 3x + 1$.

3.6 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$, $g(x) = 2x^2 + x - 2$.

3.7 $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$, $g(x) = x^2 + 3x + 2$.

3.8 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, $g(x) = x^2 - x - 2$.

3.9 $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$, $g(x) = x^2 + 4x + 3$.

3.10 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, $g(x) = x^2 - 2x - 3$.

3.11 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$, $g(x) = 2x^2 + 3x + 1$.

3.12 $f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$, $g(x) = 2x^2 + x - 1$.

3.13 $f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$, $g(x) = x^2 + x - 2$.

3.14 $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$, $g(x) = x^2 - 3x + 2$.

3.15 $1f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$, $g(x) = x^2 + 2x - 3$.

3.16 $f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$, $g(x) = x^2 - 4x + 3$.

3.17 $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$, $g(x) = 2x^2 - x - 1$.

3.18 $f(x) = x^3 - 7x + 6$, $g(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

3.19 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$, $g(x) = x^2 + x - 2$.

3.20 $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, $g(x) = x^2 - 3x + 2$.

3.21 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$, $g(x) = x^2 + 2x - 3$.

3.22 $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6,\ g(x) = x^2 - 4x + 3.$

3.23 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3,\ g(x) = 2x^2 - x - 1.$

3.24 $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2,\ g(x) = 2x^2 - 3x + 1.$

3.25 $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2,\ g(x) = 2x^2 + 3x - 2.$

3.26 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6\, g(x) = x^2 + 5x + 6.$

3.27 $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1,\ g(x) = x^3 + x^2 - x - 1.$

3.28 $f(x) = x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 5x + 6,\ g(x) = x^2 + 5x - 6.$

3.29 $f(x) = x^3 - 8x^2 + 13x - 6,\ g(x) = 3x^2 - 16x + 13.$

3.30 $f(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4,\ g(x) = 2x^2 + x - 3.$

3.31 $f(x) = 3x^3 - 22x^2 + 30x + 27,\ g(x) = x^2 - 8x + 15.$

3.32 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15,\ g(x) = x^2 - 8x + 7.$

3.33 $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3,\ g(x) = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3.$

3.34 $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1,\ g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2.$

3.35 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2,\ g(x) = x^3 + x^2 + x + 2.$

3.36 $f(x) = x^4 - 4x + 4,\ g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2.$

3.37 $f(x) = x^3 + x^2 - 2,\ g(x) = x^3 + x^2 - x - 1.$

3.38 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6,\ g(x) = x^3 + 7x^2 + 14x + 8.$

3.39 $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3,\ g(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2.$

3.40 $f(x) = 6x^5 + 2x^4 - 5x^3 - x - 3,\ g(x) = 2x^3 - 3x + 1.$

3.2. Упражнения

Пользуясь схемой Горнера, разложить многочлен $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$.

3.41 $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$, $x_0 = -1$.

3.42 $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3$, $x_0 = 1$.

3.43 $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$, $x_0 = 2$.

3.44 $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3$, $x_0 = 1$.

3.45 $f(x) = x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 5x + 6$, $x_0 = -1$.

3.46 $f(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x - 6$, $x_0 = 3$

3.47 $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$, $x_0 = 2$.

3.48 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, $x_0 = -3$.

3.49 $f(x) = x^4 - 4x + 4$, $x_0 = -2$.

3.50 $f(x) = x^5 - 6x^4 + x^3 + 11x - 6$, $x_0 = -1$.

Чему равен показатель кратности корня $x = x_0$ для многочлена $f(x)$.

3.51 $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$, $x_0 = 2$.

3.52 $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$, $x_0 = -2$.

3.53 $f(x) = 3x^5 + 2x^4 + x^3 - 10x - 8$, $x_0 = -1$.

3.54 $f(x) = x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 36x^2 - 27x - 54$, $x_0 = 3$.

Найти наименьшее общее кратное многочленов.

3.55 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$, $g(x) = x^2 + 3x + 2$.

3.56 $f(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$, $g(x) = x^2 - x - 2$.

3.57 $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$, $g(x) = x^2 + 4x + 3$.

3.58 $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$, $g(x) = x^2 - 2x - 3$.

3.58 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$, $g(x) = 2x^2 + 3x + 1$.

3.60 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$, $g(x) = 2x^2 + x - 2$.

3.3. Примеры решения заданий

Пример 3.1. Разделить многочлен $f(x)$ на многочлен $g(x)$ с остатком.

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
2x^6 & & -3x^4 & -5x^3 & & +x & -6 & x^4+3x^3+5 \\ \cline{8-8}
-(2x^6 & +6x^5 & + & & 10x^2 & &) & 2x^2-6x+15 \\ \cline{1-7}
 & -6x^5 & -3x^4 & -5x^3 & -10x^2 & +x & -6 & \\
 & -(-6x^5 & -18x^4 & & & -30x &) & \\ \cline{2-7}
 & & 15x^4 & -5x^3 & -10x^2 & +31x & -6 & \\
 & & -(15x^4 & +45x^3 & + & & 75) & \\ \cline{3-7}
 & & & -50x^3 & -10x^2 & +31x & -81 &
\end{array}
$$

$q(x) = 2x^2 - 6x + 15$ – неполное частное,
$r(x) = -50x^3 - 10x^2 + 31x - 81$ – остаток.

Пример 3.2. Найти наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

$f(x) = x^5+3x^4-12x^3-52x^2-52x-12$, $g(x) = x^4+3x^3-6x^2-22x-12$

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & +3x^4 & -12x^3 & -52x^2 & -52x & -12 & x^4+3x^3-6x^2-22x-12 \\ \cline{7-7}
-(x^5 & +3x^4 & -6x^3 & -22x^2 & -12x &) & x \\ \cline{1-6}
 & & -6x^3 & -30x^2 & -40x & -12 &
\end{array}
$$

Применяя алгоритм Евклида к многочленам с целыми коэффициентами, можно избежать дробных коэффициентов. Для этого будем домножать (делить) делимое или делитель на множители, позволяющие избавиться от дробных коэффициентов. Так как НОД находится с точностью до множителя, то на результат вычислений это влиять не будет.

В нашем примере домножим многочлен $g(x)$ на 3, а остаток разделим на -2, таким образом, первый остаток после сокращения на -2 равен $r_1(x) = 3x^3 + 15x^2 + 20x + 6$. Делим на него многочлен $3\,g(x)$:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & +9x^3 & -18x^2 & -66x & -36 & 3x^3+15x^2+20x+6 \\ \cline{6-6}
-(3x^4 & +15x^3 & +20x^2 & +6x &) & x-2 \\ \cline{1-5}
 & -6x^3 & -38x^2 & -72x & -36 & \\
 & -(-6x^3 & -30x^2 & -40x & -12) & \\ \cline{2-5}
 & & -8x^2 & -32x & -24 &
\end{array}
$$

Сократим на $-8 \Rightarrow r_2(x) = x^2 + 4x + 3$. Тогда имеем:

$$
\begin{array}{r|l}
3x^3 + 15x^2 + 20x + 6 & x^2 + 4x + 3 \\ \cline{2-2}
-(3x^3 + 12x^2 + 9x \quad) & 3x + 3 \\ \hline
3x^2 + 11x + 6 & \\
-(3x^2 + 12x + 9) & \\ \cline{1-1}
-x - 3 &
\end{array}
$$

Сократим на $-1 \Rightarrow r_3(x) = x + 3$. Получаем:

$$
\begin{array}{r|l}
x^2 + 4x + 3 & x + 3 \\ \cline{2-2}
-(x^2 + 3x \quad) & x + 1 \\ \cline{1-1}
x + 3 & \\
-(x + 3) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Так как $r_2(x) = r_3(x) \cdot (x + 1)$, то $r_3(x)$ будет тем последним остатком, на который нацело делится предшествующий остаток. Следовательно, он будет искомым наибольшим общим делителем многочленов:

$$(f(x), g(x)) = x + 3.$$

Пример 3.3.Найти наибольший общий делитель многочленои $f(x)$ и $g(x)$. Произвести проверку путем разложения на множители.

$f(x) = x^4 - 21x^2 + 76x - 84$, $g(x) = x^3 + 4x^2 - 12x$

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 \qquad\qquad - 21x^2 + 76x - 84 & x^3 + 4x^2 - 12x \\ \cline{2-2}
-(x^4 + 4x^3 - 12x^2 \qquad\qquad) & x \\ \hline
-4x^3 - 9x^2 + 76x - 84 & \\
-(-4x^3 - 16x^2 + 48x \quad) & \\ \cline{1-1}
7x^2 + 28x - 84 &
\end{array}
$$

Разделим $7x^2 + 28x - 84$ на 7 и получим $r(x) = x^2 + 4x - 12$. Так как $g(x) = r(x) \cdot x$, то $r(x)$ будет остатком, на который делится многочлен $g(x)$. Следовательно, $d(x) = (f(x), g(x)) = x^2 + 4x - 12$.

Разложим многочлены на множители:

$$g(x) = x^3 + 4x^2 - 12x = x \cdot (x^2 + 4x - 12) = x(x-2)(x+6),$$

$$f(x) = x^4 - 21x^2 + 76x - 84 = (x^2 + 4x - 12) \cdot (x^2 - 4x + 7) =$$
$$= (x-2)(x+6)(x^2 - 4x + 7).$$

Многочлен $x^2 - 4x + 7$ неприводим (так как не имеет действительных корней), значит, $d(x) = x^2 + 4x - 12$.

Пример 3.4. Разложить многочлен $f(x)$ на множители.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 16.$$

Решение: a_0=16, и если у многочлена есть целые корни, то они являются делителями числа 16. Это могут быть только числа $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 4, \pm 8, \pm 16$. Непосредственной проверкой получаем, что $f(2) = 0$, $x_0 = 2$ – корень многочлена $f(x)$.

Разделим $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 16$ на $(x-2)$, используя схему Горнера.

	a_3	a_2	a_1	a_0
c	$a_3 = b_3$	$a_2 + b_3 \cdot c$=b_2	$a_1 + b_2 \cdot c$=b_1	$a_0 + b_1 \cdot c$=b_0

Имеем $c = 2$, $a_3 = 1$, $a_2 = -3$, $a_1 = --6$, $a_0 = 16$.

	-1	-3	-6	16
2	1	-3+$1 \cdot 2$=-1	-6+$(-1) \cdot 2$=-8	16+$(-12) \cdot 2$=0

Таким образом, искомое частное будет $q(x) = x^2 - x - 8$.

Разложим многочлен $q(x) = x^2 - x - 8$ на множители. $D = 33 \Rightarrow$ $q(x) = x^2 - x - 8 = \left(x - \frac{1-\sqrt{33}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{2}\right)$.

Получаем разложение на множители

$$f(x) = (x-2)\left(x - \frac{1-\sqrt{33}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{33}}{2}\right).$$

Пример 3.5. С помощью схемы Горнера определить, является ли число $x = -3$ корнем многочлена

$$f(x) = x^5 + 8x^4 + 19x^3 + 8x^2 + 27.$$

Если является, то найти его кратность.

Решение: воспользуемся схемой Горнера

	1	8	19	9	0	27
-3	1	5	4	-3	9	0
-3	1	2	-2	3	0	
-3	1	-1	1	0		
-3	1	-4	13			

Из второй строчки таблицы $\Rightarrow x_0 = -3$ – корень многочлена $f(x)$.
Из третьей строчки таблицы $\Rightarrow x_0 = -3$ – корень кратности ≥ 2.
Из четвертой строчки таблицы $\Rightarrow x_0 = -3$ – корень кратности ≥ 3.
Из пятой строчки таблицы $\Rightarrow x_0 = -3$ – корень кратности $= 3$.

$$\Rightarrow\ f(x) = x^5 + 8x^4 + 19x^3 + 8x^2 + 27 = (x+3)^3(x^2 - x + 1).$$

Пример 3.6. Разложить многочлен $f(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10$ по степеням $(x-2)$.

Решение: воспользуемся схемой Горнера

	1	0	-4	6	-8	10
2	1	2	0	6	4	18
2	1	4	8	22	48	
2	1	6	20	62		
2	1	8	36			
2	1	10				

Отсюда

$$f(x) = \Big[\Big[[[1(x-2)+10](x-2)+36](x-2)+62\Big](x-2)+48\Big](x-2)+18.$$

Раскрыв скобки, получаем

$$f(x) = (x-2)^5 + 10(x-2)^4 + 36(x-2)^3 + 62(x-2)^2 + 48(x-2) + 18.$$

Пример 3.7. Найти наименьшее общее кратное многочленов

$$f(x) = x^3 + x - 2,\ g(x) = x^3 + x^2 - x - 1.$$

Решение. Сначала найдем НОД многочленов.

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & +x & -2 & x^3+x^2-x-1 \\ \cline{5-5}
-(x^3 & +x^2 & -x & -1) & 1 \\ \cline{1-4}
 & -x^2 & +2x & -1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +x^2 & -x & -1 & -x^2+2x-1 \\ \cline{5-5}
-(x^3 & -2x^2 & +x &) & -x-3 \\ \cline{1-4}
 & 3x^2 & -2x & -1 & \\
 & -(3x^2 & -6x & +3) & \\ \cline{2-4}
 & & 4x & -4 &
\end{array}$$

Разделим $4x - 4$ на 4, получим $x - 1$

$$\begin{array}{rrr|l}
-x^2 & +2x & -1 & x-1 \\ \cline{4-4}
-(-x^2 & +x &) & -x+1 \\ \cline{1-3}
 & x & -1 & \\
 & -(x & -1) & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

$-x^2 + 2x - 1 = (x - 1)(-x + 1), \Rightarrow d(x) = (f(x), g(x)) = x - 1.$

Используем равенство

$$d(x) \cdot \text{НОК}(f(x), g(x)) = (x - 1) \cdot \text{НОК}f(x), g(x)) =$$
$$= f(x) \cdot g(x) = (x^3 + x - 2)(x^3 + x^2 - x - 1).$$

Откуда $\text{НОК}(f(x), g(x)) = \dfrac{(x^3 + x - 2)(x^3 + x^2 - x - 1)}{x - 1} =$

$$= \frac{(x - 1)(x^2 + x + 2)(x^3 + x^2 - x - 1)}{x - 1} =$$
$$= (x^2 + x + 2)(x^3 + x^2 - x - 1) = x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 3x - 2.$$

Глава 4

Комплексные числа

Натуральные числа возникли как естественное обобщение понятия количества предметов. Для того чтобы вычитание было всюду определенной операцией, были введены целые числа, которые могут быть отрицательными. Аналогично для осуществления деления приходится ввести множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$, которые образуют поле относительно сложения и умножения. Следующий шаг абстракции – рассматривать такое множество чисел, в котором можно извлекать корни, т. е. производить действие, обратное к возведению в степень. Множества действительных чисел $\mathbb{R}$ недостаточно, так как квадратный корень из отрицательного числа не является действительным числом. Поэтому введем новый элемент $i = \sqrt{-1}$, называемый мнимой единицей, и рассмотрим множество всех выражений вида $a + b\,i$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Это будет множество комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Комплексные числа можно считать упорядоченными парами чисел (a, b), где $a, b \in \mathbb{R}$, для которых понятия равенства, суммы, произведения и отождествления некоторых пар с действительными числами вводятся согласно следующим аксиомам:

1. Равенство пар (a, b), (c, b)
$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d$.
2. Суммой пар (a, b), (c, b) называется пара
$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.
3. Произведение пар (a, b), (c, b) называется пара
$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.
4. Пара $(a, 0)$ отождествляется с числом a

$(a,0)=a$.

Из 3 и 4 аксиом $\Rightarrow m(a,b)=(ma,mb)$. Действительно, $m=(m,0)\Rightarrow m(a,b)=(m,0)(a,b)=(ma-0\cdot b, mb+0\cdot a)=(ma,mb)$.

Для заданных действий выполняются следующие свойства:

1. $(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b)$ коммутативность сложения.

2. $((a,b)+(c,d))+(g,h)=(a,b)+((c,d)+(g,h))$ ассоциативность сложения.

3. Пара $(0,0)=0$ – нейтральный элемент по сложению,
$(a,b)+(0,0)=(a,b)$;

4. Пара $(-a,-b)$ противоположная для пары (a,b),
$(a,b)+(-a,-b)=(0,0)$.

5. $(a,b)\cdot(c,d)=(c,d)\cdot(a,b)$ коммутативность умножения.

6. $((a,b)+(c,d))\cdot(g,h)=(a,b)\cdot(g,h)+(c,d)\cdot(g,h)$,
$(g,h)\cdot((a,b)+(c,d))=(g,h)\cdot(a,b)+(g,h)\cdot(c,d)$ дистрибутивность.

7. $((a,b)\cdot(c,d))\cdot(g,h)=(a,b)\cdot((c,d)\cdot(g,h))$ ассоциативность умножения.

8. Пара $(1,0) = 1$ – нейтральный элемент по умножению, $(a,b)(1,0)=(a,b)$.

Следовательно, комплексные числа составляют коммутативное ассоциативное кольцо с единицей.

Пары $(a,b),(a,-b)$ называются сопряженными,
$(a,b)(a,-b)=a^2+b^2$.

9. Для любой пары $(a,b)\neq(0,0)$ существует обратная
$(a,b)^{-1}=\left(\dfrac{a}{a^2+b^2},-\dfrac{b}{a^2+b^2}\right)$.

Получаем, что комплексные числа образуют поле, которое обозначим $\mathbb{C}$. Алгебраическая форма записи комплексного числа $z=a+b\,i$, $(a,b\in\mathbb{R})$ соответствует паре

$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)(0,1)=a+b\,i$.

Теперь мнимая единица $i=(0,1)$, а из 3 следует, что $i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$.

В алгебраической форме $a=\mathtt{Re}\,z, b=\mathtt{Im}\,z$, где $\mathtt{Re}\,z$ называется действительной частью, а $\mathtt{Im}\,z$ – мнимой частью комплексного числа z.

Пусть $z_1=a_1+b_1\,i$, $z_2=a_2+b_2\,i$, тогда

$z_1+z_2=a_1+a_2+(b_1+b_2)\,i$

$z_1\cdot z_2=a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+b_1a_2)\,i$

$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\,i=z_1\cdot z_2^{-1}$.

Комплексное число, сопряженное к числу $z = a + b\,i$ обозначается $\overline{z} = a - b\,i$.

Пусть $z_1 = a_1 + b_1\,i$, $z_2 = a_2 + b_2\,i$, тогда выполняются следующие равенства:

1. $\overline{\overline{z_1}} = z_1$;
2. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$;
3. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;
4. $\overline{z_1}^{-1} = \overline{z_1^{-1}}$, $z_1 \neq 0$;
5. $z_1 + \overline{z_1} = 2a_1$;
6. $z_1 - \overline{z_1} = 2b_1\,i$;
7. $z_1\overline{z_1} = a_1^2 + b_1^2$;
8. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, z_2 \neq 0.$

Доказательство равенств остается в качестве упражнений.

Комплексное число изображается радиус-вектором, начало которого находится в точке $(0;0)$, а конец в точке $(a;b)$ (рис.4.1).

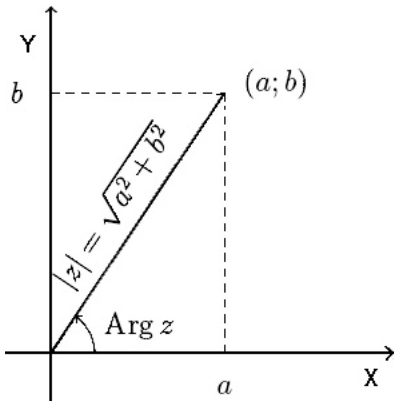

Рис. 4.1. Модуль и аргумент комлексного числа

Модулем комплексного числа $z = a + b\,i$ называется длина вектора z и обозначается $|z| : |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $|z| \geqslant 0$, $|z| = 0 \Leftrightarrow \{a = 0, b = 0\}$.

Угол φ между радиус-вектором точки z и положительным направлением оси Ox называется аргументом числа z и обозначается $\mathrm{Arg}z$. Аргумент числа z определяется с точностью до кратного 2π. $\mathrm{Arg}z = \{\varphi + 2\pi k, k{\in}\mathbb{Z}\}$. Аргумент для $z = 0$ не определен.

Главным значением аргумента называется значение $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Обозначение $\arg z$. $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Главное значение аргумента определяется формулой:

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a}, & \text{если } \ a > 0, \\ \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a} + \pi, & \text{если } a < 0, b \geqslant 0, \\ \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a} - \pi, & \text{если } a < 0, b < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } a = 0, b > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если } a = 0, b < 0. \end{cases}$$

Тригонометрическая форма записи комплексного числа:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Пусть даны два числа

$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Тогда модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей, а аргумент произведения – сумме аргументов.

$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

Модуль частного двух комплексных чисел равен модулю делимого, деленному на модуль делителя, а аргумент получается вычитанием аргумента делителя из аргумента делимого.

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

$z^{-1} = |z|^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$.

Доказательство остается в качестве упражнения.

Из формулы для умножения комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, получается формула Муавра

$$z^n = (|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ n \in \mathbb{Z}.$$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n различных значений и находится по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\Big(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\Big),\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Используя формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ можно получить показательную форму записи комплексного числа $z = |z|e^{i\varphi}$.

Если $z_1 = |z_1|e^{i\varphi_1}$, $z_2 = |z_2|e^{i\varphi_2}$, то справедливы равенства:

$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$, $\quad \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$.

Корни n-й степени из 1 в показательной форме имеют вид

$$a_k = e^{\frac{2\pi k\, i}{n}}, \quad k = 0, 1 \ldots n-1.$$

В частности, множество корней n-й степени из 1 образуют по умножению циклическую группу, изоморфную абелевой группе $\mathbb{Z}_n$ по сложению.

4.1. Задачи

Выполнить действия. Результат записать в алгебраической форме.

4.1 $\left(\dfrac{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i}{3-i}\right)^3 + i^{24}$,

4.2 $\left(\dfrac{-2-8i}{4-i}\right)^5 + i^{62}$,

4.3 $\left(\dfrac{-\frac{5}{2} + \frac{3}{4}i}{\frac{3}{2} + 5i}\right)^{-2} + i^{78}$,

4.4 $\left(\dfrac{3-i}{-2-6i}\right)^5 + i^{28}$,

4.5 $\left(\dfrac{2-8i}{-4-i}\right)^{14} + i^{60}$,

4.6 $\left(\dfrac{-1+4i}{2+\frac{1}{2}i}\right)^2 + i^{214}$,

4.7 $\left(\dfrac{1-\frac{7}{2}i}{-7-2i}\right)^3 + i^{14}$,

4.8 $\left(\dfrac{-6-2i}{1+3i}\right)^3 + i^{44}$,

4.9 $\left(\dfrac{13+i}{7-6i}\right)^4 + i^{38}$,

4.10 $\left(\dfrac{5+2i}{2-5i}\right)^7 + i^{122}$,

4.11 $\left(\dfrac{-7-12i}{-12+7i}\right)^5 - i^{341}$,

4.12 $\left(\dfrac{3+10i}{-5+\frac{3}{2}i}\right)^2 + i^{84}$, 4.13 $\left(\dfrac{1-\dfrac{5}{2}i}{\dfrac{5}{2}+i}\right)^{-8}+i^{78}$,

4.14 $\left(\dfrac{-\dfrac{1}{2}-4i}{1-\dfrac{1}{4}i}\right)^{4}+i^{56}$,

4.15 $\dfrac{(1-4i)(-1+4i)}{3-2i}+i^{35}$,

4.16 $\dfrac{i-7}{2i+3}+10\,i^{55}-(2+i)^2$,

4.17 $\dfrac{3i+2}{4-i}+5\,i^{59}-(3-i)^2$,

4.18 $\dfrac{(i-1)^2}{2+5i}-7\,i^{57}$,

4.19 $\dfrac{2-7i}{3+4i}+i^{71}-(3+i)^2$,

4.20 $i^{63}+\dfrac{1}{i}+\dfrac{2+3i}{3+2i}$,

4.21 $i^{201}+\dfrac{2-4i}{3+i}+(1-i)^2$,

4.22 $\dfrac{(2-i)(3+i)}{3+2i}+i^{45}$,

4.23 $\left(\dfrac{3+i}{1+i}\right)^{2}+4\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{121}$,

4.24 $\left(\dfrac{5i}{3+4i}\right)^{2}+10\,i^{17}+\dfrac{3-2i}{i}$,

4.25 $\dfrac{6+2i}{3-7i}-\dfrac{2+3i}{2+5i}+7\,i^{137}$,

4.26 $\dfrac{-9+3i}{1-2i}+\dfrac{2+3i}{i}+i^{75}$,

4.27 $\dfrac{(1+i)(2-i)}{(5-i)\cdot i}+\dfrac{1+2i}{2+i}+i^{25}$,

4.28 $\dfrac{(1-i)^2}{2+3i}-\dfrac{1}{1-i}-i^{8}+\dfrac{1}{2i^{10}}$,

4.29 $\left(\dfrac{5i}{3+4i}\right)^{2}(1-i)+8\,i^{173}$,

4.30 $\dfrac{(i-1)^2}{2+3i}-\dfrac{1}{i-1}+\dfrac{1}{2i^{10}}$,

4.31 $\dfrac{(1+i)(2-3i)}{(3-i)\cdot i}+\dfrac{1+2i}{1+i}+\dfrac{1}{i^{20}}$,

4.32 $\left(\dfrac{\dfrac{i}{4}-1}{2i+\dfrac{1}{2}}\right)^{-3}+i^{26}$,

4.33 $\left(\dfrac{1+\dfrac{3}{2}i}{3+2i}\right)^{4}-7\,i^{118}$,

4.34 $(1+i)^2+\dfrac{2i-3}{i+1}-i^{66}$,

4.35 $\dfrac{(5+i)(3+5i)}{2i}-\dfrac{1+2i}{2+i}-8\,i^{77}$,

4.36 $\dfrac{(5+i)(7-6i)}{3+i}-\dfrac{1+i}{1-i}+4i^{33}$,

4.37 $\dfrac{(i+1)^5}{(1-i)^3}-\dfrac{1}{i+3}+i^{98}$,

4.38 $\left(\dfrac{5-7i}{7-5i}\right)^{7}+i^{22}+\dfrac{6-7i}{i}$,

4.39 $\left(\dfrac{1-\dfrac{3}{4}i}{3-4i}\right)^{3}+i^{189}$, 4.40 $\left(\dfrac{4-\dfrac{5}{2}i}{\dfrac{5}{2}-4i}\right)^{-3}+i^{168}$.

4.2. Упражнения

Представьте число:

- в тригонометрической форме;
- в показательной форме.

Вычислите z^{40}.

4.41 $-\sqrt{3}-i$,

4.42 $2\sqrt{3}+2i$,

4.43 $-3\sqrt{3}+3i$,

4.44 $4\sqrt{3}+4i$,

4.45 $5-5i$,

4.46 $1-\sqrt{3}i$,

4.47 $2+2\sqrt{3}i$,

4.48 $-1-\sqrt{3}i$,

4.49 $-3-3\sqrt{3}i$,

4.50 $-2-2i$

Найти корни уравнения $z^2+z_0=0$.

4.51 $z_0=2+2\sqrt{3}i$,

4.52 $z_0=3-i$,

4.53 $z_0=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$,

4.54 $z_0=1-\sqrt{3}i$,

4.55 $z_0=-\sqrt{3}-i$,

4.56 $z_0=-1-i$.

4.3. Примеры решения заданий

Пример 4.1.
Выполнить действия. Результат записать в алгебраической форме.

$$\left(\dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}i}{5+i}\right)^{-5}+i^{123}$$

Упростим выражение, стоящее в скобках. Домножим числитель и знаменатель, на число, сопряженное к знаменателю.

$$\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i\right)(5-i)}{(5+i)(5-i)}=\frac{\frac{1}{2}(1-5i)(5-i)}{(5+i)(5-i)}=\frac{\frac{1}{2}(5-i-25i+5i^2)}{25-i^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(-26i)}{26}=-\frac{i}{2}$$

Возведем получившееся число в степень

$$\left(-\frac{i}{2}\right)^{-5}=\left(-\frac{2}{i}\right)^{5}=-\frac{2^5}{i^5}=-\frac{32}{i}=-\frac{32\cdot i}{i\cdot i}=-\frac{32\,i}{-1}=32\,i.$$

$$i^{123}=i^{4\cdot 30+3}=-i$$

Здесь использовали свойства степени числа i :

$i^0=1,\ i^1=i,\ i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1,\ldots,i^{4k+p}=i^p.$

Получаем

$$\left(\frac{\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}{5+i}\right)^{-5}+i^{123}=32\,i-i=31\,i.$$

Пример 4.2.

Выполнить действия. Результат записать в алгебраической форме.

$$\frac{(2+i)(5-i)}{(3-i)i}-\frac{2+i}{1+2i}+\frac{1}{10\,i^{\,19}}.$$

Решение:

$$\frac{(2+i)(5-i)}{(3-i)i}=\frac{10-2i+5i-i^2}{3i-i^2}=\frac{11+3i}{1+3i}=\frac{(11+3i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=$$

$$=\frac{11-33i+3i-9i^1}{1-9i^2}=\frac{20-30i}{10}=2-3i,$$

$$\frac{2+i}{1+2i}=\frac{(2+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{2-4i+i-2i^2}{1-4i^2}=\frac{4-3i}{5}=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i,$$

$$i^{19}=i^{4\cdot 4+3}=i^3=-i,\ \frac{1}{10\,i^{19}}=\frac{1}{10(-i)}=\frac{i}{10(-i)i}=\frac{1}{10}i,$$

$$\frac{(2+i)(5-i)}{(3-i)i}-\frac{2+i}{1+2i}+\frac{1}{10\,i^{\,19}}=2+3i-\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i\right)+\frac{1}{10}i=$$

$$=2+3i-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i+\frac{1}{10}i=\left(2-\frac{4}{5}\right)+\left(+\frac{3}{5}+\frac{1}{10}\right)=\frac{6}{5}+\frac{37}{10}i.$$

Пример 4.3. Представьте число $z=-4+4\sqrt{3}i$

- в тригонометрической форме;
- в показательной форме.

Вычислите z^{30}.

Решение: $z = -4 + 4\sqrt{3}i$, $a = -4$, $b = 4\sqrt{3}$. Найдем модуль числа z.
$|z| = \sqrt{(-4)^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 + 16 \cdot 3} = \sqrt{64} = 8.$

Вычислим аргумент числа z. $a < 0$, $b > 0 \Rightarrow \arg z = \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a} + \pi.$

$\varphi = \arg z = \operatorname{arctg} \dfrac{4\sqrt{3}}{-4} + \pi = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi = -\dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{2}{3}\pi,$

$z = -4 + 4\sqrt{3} = 8(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi)$ – тригонометрическая форма записи комплексного числа.

$z = 8e^{i\frac{2}{3}\pi}$ – показательная форма записи комплексного числа.

$z^{30} = |z|^{30}(\cos(30\,\varphi) + i \sin(30\,\varphi)) =$
$= 8^{30}\left(\cos\left(\dfrac{30 \cdot 2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\dfrac{30 \cdot 2}{3}\pi\right)\right) = 8^{30}(\cos 20\pi + i \sin 20\pi) =$
$= 8^{30}.$

Пример 4.4.

Найти корни уравнения $z^3 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = 0.$

Решение:

$$z^3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

Обозначим $z_0 = z^3$, тогда

$$z = \sqrt[3]{z_0} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i},$$

$$\sqrt[3]{z_0} = \sqrt[3]{|z_0|}\Big(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{3} + i \sin\frac{\varphi + 2\pi k}{3}\Big),\ k = 0,\ 1,\ 2.$$

Найдем модуль и аргумент

$|z_0| = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = 1,$

$\varphi = \arg z_0 = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{-\dfrac{1}{2}}\right) - \pi = \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \pi = \dfrac{\pi}{3} - \pi = -\dfrac{2}{3}\pi.$

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\cos\left(\frac{-\frac{2}{3}\pi+2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\frac{2}{3}\pi+2\pi k}{3}\right),$$

$k=0,\ 1,\ 2$. Получаем три корня:

$k=0,\ \alpha_0=\cos\left(-\frac{2}{9}\right)\pi+i\sin\left(-\frac{2}{9}\right)\pi=\cos\frac{2}{9}\pi-i\sin\frac{2}{9}\pi,$

$k=1,\ \alpha_1=\cos\left(\frac{-\frac{2}{3}\pi+2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\frac{2}{3}\pi+2\pi}{3}\right)=$

$=\cos\frac{4}{9}\pi+i\sin\frac{4}{9}\pi,$

$k=2,\ \alpha_2=\cos\left(\frac{-\frac{2}{3}\pi+4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\frac{2}{3}\pi+4\pi}{3}\right)=$

$=\cos\frac{10}{9}\pi+i\sin\frac{10}{9}\pi=\cos\left(-\frac{8}{9}\right)\pi+i\sin\left(-\frac{8}{9}\right)\pi=\cos\frac{8}{9}\pi-i\sin\frac{8}{9}\pi.$

Глава 5

Линейные преобразования линейных пространств

Множество L с заданной на нем операцией сложения называется линейным (векторным) пространством над полем P, если для всех $v \in L, \lambda \in P$ определено внешнее произведение $\lambda v \in L$ и при этом выполнены следующие тождества:

- $\langle L, + \rangle$ является абелевой группой
- $\lambda_1(\lambda_2 v) = (\lambda_1 \lambda_2) v$
- $(\lambda_1 + \lambda_2) v = \lambda_1 v + \lambda_2 v$
- $\lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$
- $1 \cdot v = v$

Внешнее произведение не является двухместной операцией, так как его сомножители лежат в разных множествах. Однако, внешнее умножение на фиксированный элемент поля будет одноместной операцией и линейное пространство можно считать алгебраической структурой. Но если поле P бесконечно, то сигнатура тоже бесконечна.

Пусть L – линейное пространство и K – его подмножество, являющееся подгруппой абелевой группы $\langle L, + \rangle$. Если K замкнуто относительно умножения на все элементы поля ($v \in K, \lambda \in P \Rightarrow \lambda v \in K$), то K называется подпространством пространства L.

Элементы линейного пространства принято называть векторами (геометрические векторы есть линейное пространство над полем действительных чисел). Вектор вида $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$ называется линейной комбинацией векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$. При $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ получаем тривиальную линейную комбинацию, которая равна нейтральному элементу (нулевому вектору) $\mathbf{0}$ абелевой группы $\langle L, +\rangle$. Векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ называются линейно независимыми, если никакая их нетривиальная линейная комбинация не равна нулевому вектору. В противном случае, когда существует нетривиальная линейная комбинация равная нулевому вектору, говорят, что векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ являются линейно зависимыми. Верно следующее утверждение:

Векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда один из них равен линейной комбинации остальных.

Если мы возьмем один вектор, затем добавим к нему еще один, потом еще, то рано или поздно мы получим множество линейно зависимых векторов. Наибольшее по количеству векторов линейно независимое множество называется базисом линейного пространства. Оказывается, верна

Теорема. Все базисы заданного линейного пространства L имеют одинаковое количество векторов, которое называется размерностью этого пространства и обозначается $\dim L$.

Следствием этой теоремы служит утверждение: каждый вектор однозначно представляется в виде линейной комбинации базисных векторов. А именно, если $v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$, где $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис L, то $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ называются координатами вектора v в этом базисе. Часто координаты записывают в столбец:

$$v^{\downarrow} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

По известным координатам векторов $v_1^{\downarrow}, v_2^{\downarrow}, \ldots, v_n^{\downarrow}$ легко проверить их линейную независимость:

Векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ являются линейно независимыми тогда и только тогда, когда матрица, составленная из столбцов их координат $\left(v_1^{\downarrow}\, v_2^{\downarrow}\, \cdots\, v_n^{\downarrow}\right)$ имеет ненулевой определитель.

Подпространство, порожденное векторами $v_1, v_2, \ldots, v_n$, состоит из всевозможных их линейных комбинаций. В частности, подпространство, порожденное одним вектором $v \neq \mathbf{0}$, есть $\{\lambda v \,|\, \lambda \in P\}$ и имеет размерность один.

Отображение $f : L_1 \to L_2$ называется линейным отображением, если выполнены свойства:

- $f(\lambda v) = \lambda f(v)$
- $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$

Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис L_1, а $k_1, k_2, \ldots, k_m$ – базис L_2, то линейное отображние однозначно определяется координатами векторов $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$, а для любого другого $v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$ верно $f(v) = \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \cdots + \lambda_n f(e_n)$. Обозначим a_{ij} координаты вектора $f(e_j)$ в базисе $k_1, k_2, \ldots, k_m$, то есть $f(e_j) = a_{1j}k_1 + a_{2j}k_2 + \cdots + a_{mj}k_m$. Матрица

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей линейного отображения $f : L_1 \to L_2$ в базисах $e_1, e_2, \ldots, e_n$, $k_1, k_2, \ldots, k_m$. По заданной матрице результат линейного отображения находится как

$$f(v)^{\downarrow} = A_f \cdot v^{\downarrow}$$

Когда пространства L_1 и L_2 являются одним и тем же пространством L с базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$, то линейное отображние $f : L \to L$ называется линейным преобразованием пространства L. Матрица A_f линейного преобразования в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ будет квадратной матрицей размера $n \times n$. Для линейного преобразования пространства L возможна ситуация, когда некоторый ненулевой вектор $v \in L$ при преобразовании переходит в вектор, коллинеарный исходному: $f(v) = \alpha v$. Эта ситуация интересна тем, что тогда все подпространство, порожденное v переходит само в себя:

$$f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda(\alpha v) = \alpha(\lambda v).$$

Геометрический смысл состоит в растяжении в α раз «прямой», составленной из векторов, коллинеарных v. В этом случае говорят, что вектор v является собственным вектором линейного преобразования, соответствующим собственному значению α.

Обобщением этой ситуации является определение инвариантного подпространства. Подпространство $K \subset L$ называется инвариантным относительно преобразования $f : L \to L$, если для всех $v \in K$ выполнено $f(v) \in K$.

Пусть линейное преобразование $f : L \to L$ задано матрицей A_f. Умножение на скаляр α соответствует линейному преобразованию с матрицей αE. Таким образом,

$$f(v)^{\downarrow} = \alpha v^{\downarrow} \iff A_f \cdot v^{\downarrow} = \alpha E \cdot v^{\downarrow} \iff (A_f - \alpha E)\, v^{\downarrow} = 0^{\downarrow}.$$

Так как v – ненулевой вектор, то матрица $A_f - \alpha E$ вырожденная и $\det(A_f - \alpha E) = 0$.

Для квадратной матрицы размера $n \times n$ уравнение $\det(A_f - \alpha E) = 0$ имеет степень n и называется характеристическим уравнением. Число корней этого уравнения не больше n, а каждый корень α является собственным значением линейного преобразования.

Если α является простым корнем, то этому собственному значению соответствует одномерное подпространство собственных векторов. Таким образом, собственный вектор определяется с точностью до произвольной постоянной из поля P.

Если α является кратным корнем характеристического уравнения, то возможны несколько вариантов. Например, собственному значению α, которое является корнем кратности два, соответствует инвариантное относительно рассматриваемого линейного преобразования подпространство размерности два. Но его базис может состоять либо из двух линейно независимых собственных векторов, либо из одного собственного вектора v и присоединенного к нему вектора w:

$$f(w) = \alpha w + v.$$

Для корней кратности три и более количество вариантов структуры инвариантного подпространства еще больше.

5.1. Задачи

Задана матрица линейного преобразования в некотором базисе A. Найти все его собственные значения и один из собственных векторов.

5.1 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5.2 $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

5.3 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

5.4 $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

5.5 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 9 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

5.6 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

5.7 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

5.8 $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ 17 & 5 & -6 \\ 8 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

5.9 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

5.10 $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5.11 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

5.12 $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 9 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

5.13 $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 17 & 8 & -6 \\ 8 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

5.14 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Задана матрица линейного преобразования в некотором базисе A. Найти все его собственные значения и все собственные векторы.

5.15 $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

5.16 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

5.17 $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

5.18 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

5.19 $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

5.20 $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

5.21 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

5.22 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

5.23 $\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

5.24 $\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

5.25 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

5.26 $\begin{pmatrix} 32 & 30 \\ 30 & 7 \end{pmatrix}$

5.27 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

5.28 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

5.29 $\begin{pmatrix} -6 & -16 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

5.30 $\begin{pmatrix} 8 & 14 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$

5.31 $\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

5.32 $\begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

5.33 $\begin{pmatrix} 19 & -36 \\ 7 & -13 \end{pmatrix}$

5.34 $\begin{pmatrix} -6 & 16 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$

5.35 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

5.36 $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

5.37 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

5.38 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

5.39 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

5.40 $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

5.2. Упражнения

Задана матрица линейного преобразования в некотором базисе A. Найти все его собственные значения и все собственные, а если есть, то и присоединенные векторы.

5.41 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

5.42 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

5.43 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

5.44 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

5.45 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

5.46 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

5.47 $\begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

5.48 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

5.49 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

5.50 $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

5.51 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

5.52 $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

5.3. Примеры решения заданий

Задана матрица линейного преобразования в некотором базисе A. Найти все его собственные значения и все собственные, а если есть, то и присоединенные векторы.

Пример 5.1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Составляем характеристическое уравнение

$$\det(A - \alpha E) = \det \begin{pmatrix} 3-\alpha & 2 & 1 \\ 0 & 1-\alpha & 3 \\ 0 & 2 & -4-\alpha \end{pmatrix} =$$
$$= (3-\alpha)(1-\alpha)(-4-\alpha) - 2 \cdot 3 \cdot (3-\alpha) =$$
$$= (3-\alpha)(-4-\alpha+4\alpha+\alpha^2-6) =$$
$$= (3-\alpha)(\alpha^2+3\alpha-10) = 0.$$

Один из корней характеристического уравнения $\alpha = 3$. Поделим обе части уравнения на $(3 - \alpha)$ и получим квадратное уравнение $\alpha^2 + 3\alpha - 10 = 0$. Его корни $\alpha = -5$ и $\alpha = 2$. Таким образом, найдены все три собственных значения линейного преобразования. Так как кратных корней нет, то каждому собственному значению соответствует один собственный вектор, заданный с точностью до произвольной постоянной.

Рассмотрим собственное значение $\alpha = 3$. Обозначим координаты собственного вектора v_1, v_2, v_3. Решим систему

$$(A - \alpha E)\, v^{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_2 + v_3 \\ -2v_2 + 3v_3 \\ 2v_2 - 7v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из $2v_2 + v_3 = 0$ и $-2v_2 + 3v_3 = 0$ следует $4v_3 = 0$. Значит $v_3 = 0$ и, следовательно, $v_2 = 0$. Значение v_1 равно произвольной постоянной C, так как в систему уравнений v_1 не входит в явном виде. Собственный вектор, соответствующий собственному значению $\alpha = 3$, имеет вид

$$v = \begin{pmatrix} C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь рассмотрим собственное значение $\alpha = 2$. Тогда

$$(A - \alpha E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

и система уравнений будет

$$\begin{pmatrix} v_1 + 2v_2 + v_3 \\ -v_2 + 3v_3 \\ 2v_2 - 6v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Последние два уравнения равносильны $v_2 = 3v_3$. Подставим в первое уравнение:

$$v_1 = -2v_2 - v_3 = -6v_3 - v_3 = -7v_3.$$

В качестве значения v_3 можно взять произвольную постоянную C, тогда $v_2 = 3C$, $v_1 = -7C$. Собственный вектор, соответствующий собственному значению $\alpha = 2$, имеет вид

$$v = \begin{pmatrix} -7C \\ 3C \\ C \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Наконец, для $\alpha = -5$ система примет вид

$$\begin{pmatrix} 8v_1 + 2v_2 + v_3 \\ 6v_2 + 3v_3 \\ 2v_2 + v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Последние два уравнения эквивалентны $v_3 = -2v_2$. Подставим в первое уравнение: $8v_1 = 0$. Значит, $v_1 = 0$, и собственный вектор, соответствующий собственному значению $\alpha = -5$, имеет вид

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ C \\ -2C \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Пример 5.2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$.

Составляем характеристическое уравнение

$$\det(A - \alpha E) = \det \begin{pmatrix} 2-\alpha & 9 \\ -1 & -4-\alpha \end{pmatrix} = (2-\alpha)(-4-\alpha) - (-9) =$$
$$= -8 + 4\alpha - 2\alpha + \alpha^2 + 9 = \alpha^2 + 2\alpha + 1 = (\alpha + 1)^2 = 0.$$

Корень $\alpha = -1$ имеет кратность 2. Сначала ищем собственный вектор.

$$(A - \alpha E) = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Оба уравнения $3v_1 + 9v_2 = 0$ и $-v_1 - 3v_2 = 0$ равносильны $v_1 = -3v_2$. Собственный вектор

$$v = \begin{pmatrix} -3C \\ C \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для присоединенного к нему вектора

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

выполняется система уравнений

$$(A - \alpha E)\, w^{\downarrow} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\begin{cases} 3w_1 + 9w_2 = -3 \\ -w_1 - 3w_2 = 1 \end{cases}.$$

Оба уравнения равносильны $w_1 = -3w_2 - 1$. Присоединенный вектор имеет вид

$$w = \begin{pmatrix} -3C - 1 \\ C \end{pmatrix},$$

где C – произвольная постоянная.

Глава 6

Квадратичные формы

Квадратичной формой от n переменных над полем P называется выражение вида

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – переменные, $a_{ij} \in P$. Так как $x_i x_j = x_j x_i$, то удобно считать, что $(a_{ij} + a_{ji}) x_i x_j = 2b_{ij} x_i x_j$, если характеристика поля не равна 2. Это условие верно для всех числовых полей.

Обозначим $b_{ij} = \dfrac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B_f = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T \cdot B_f \cdot X$, причем матрица B_f симметричная: $b_{ji} = b_{ij}$. Она называется матрицей квадратичной формы $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Квадратичная форма $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ получается из формы $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ невырожденной заменой переменных, если для некоторой невырожденной матрицы C после замены $X = CY$ получается равенство

$$f(x_1(y_1, \ldots, y_n), x_2(y_1, \ldots, y_n), \ldots, x_n(y_1, \ldots, y_n)) = g(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

В этом случае между матрицами квадратичных форм выполнено соотношение $B_g = C^T B_f C$. Так как у невырожденной матрицы всегда есть обратная матрица, то и форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ получается из $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ невырожденной заменой переменных. Такие пары форм называют эквивалентными.

Каноническая квадратичная форма не содержит произведений разных элементов, т. е. имеет вид

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2.$$

Ее матрица является диагональной матрицей.

Теорема. Любая квадратичная форма эквивалентна некоторой канонической квадратичной форме.

Если мы рассматриваем формы над полем действительных чисел, то матрицы эквивалентных канонических квадратичных форм имеют одинаковое количество положительных и одинаковое количество отрицательных элементов на главной диагонали. Этот факт при $n = 2$ и $n = 3$ важен для аналитической геометрии кривых и поверхностей второго порядка. Известно, что над полем действительных чисел любая симметричная матрица B может быть приведена к диагональному виду с помощью ортогональной матрицы G следующим образом:

$$D = G^{-1}BG = G^T BG.$$

Геометрический смысл заключается в таком повороте системы координат, что уравнение кривой (или поверхности) второго порядка принимает канонический вид.

Напомним, что матрица G называется ортогональной, если $G^{-1} = G^T$. Поэтому задача отыскания невырожденной замены переменных для приведения квадратичной формы с матрицей B к каноническому виду сводится к отысканию базиса из собственных векторов матрицы B и последующему их нормированию. Нормирование вектора с координатами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – это деление каждой координаты на величину $\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2}$.

Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ над полем действительных чисел называется положительно определенной, если при любых значениях $x_1, x_2, \ldots, x_n$, не все из которых равны 0, верно

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0.$$

Ясно, что каноническая положительно определенная форма имеет диагональную матрицу с положительными элементами на диагонали. Однако можно проверить положительную определенность, не приводя к каноническому виду.

Теорема. Квадратичная форма над полем действительных чисел является положительно определенной тогда и только тогда, когда все главные угловые миноры ее матрицы положительны.

Доказательство приведено в [2, с. 163].

6.1. Задачи

Задана квадратичная форма $f(x_1, x_2)$ над полем действительных чисел. Найти ее матрицу и матрицу замены переменных, приводящих это форму к канонической. Проверить непосредственной заменой переменных.

6.1 $7x_1^2 + 8x_1x_2 + x_2^2$

6.2 $2x_1^2 + 6x_1x_2 + 10x_2^2$

6.3 $30x_1^2 + 10x_1x_2 + 6x_2^2$

6.4 $5x_1^2 + 24x_1x_2 - 5x_2^2$

6.5 $3x_1^2 + 8x_1x_2 + 9x_2^2$

6.6 $x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2$

6.7 $20x_1^2 + 10x_1x_2 - 4x_2^2$

6.8 $11x_1^2 + 24x_1x_2 + x_2^2$

6.9 $5x_1^2 - 8x_1x_2 - x_2^2$

6.10 $2x_1^2 - 14x_1x_2 + 2x_2^2$

6.11 $4x_1^2 - 6x_1x_2 - 4x_2^2$

6.12 $10x_1^2 - 10x_1x_2 - 14x_2^2$

6.13 $x_1^2 + 8x_1x_2 + 7x_2^2$

6.14 $3x_1^2 - 8x_1x_2 - 3x_2^2$

6.15 $5x_1^2 - 6x_1x_2 - 3x_2^2$

6.16 $-3x_1^2 - 10x_1x_2 + 21x_2^2$

6.17 $2x_1^2 - 24x_1x_2 + 12x_2^2$

6.18 $9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2$

6.19 $32x_1^2 + 60x_1x_2 + 7x_2^2$

6.20 $3x_1^2 + 8x_1x_2 + 3x_2^2$

6.21 $10x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_2^2$

6.22 $6x_1^2 + 10x_1x_2 + 30x_2^2$

6.23 $-5x_1^2 - 24x_1x_2 + 5x_2^2$

6.24 $9x_1^2 - 8x_1x_2 + 3x_2^2$

6.25 $-9x_1^2 - 6x_1x_2 - x_2^2$

6.26 $4x_1^2 - 10x_1x_2 - 20x_2^2$

6.27 $x_1^2 + 24x_1x_2 + 11x_2^2$

6.28 $x_1^2 + 8x_1x_2 - 5x_2^2$

6.29 $-4x_1^2 + 6x_1x_2 + 4x_2^2$

6.30 $-x_1^2+10x_1x_2-x_2^2$

6.31 $14x_1^2+10x_1x_2-10x_2^2$

6.32 $3x_1^2+8x_1x_2-3x_2^2$

6.33 $3x_1^2+6x_1x_2-5x_2^2$

6.34 $21x_1^2+10x_1x_2-3x_2^2$

6.35 $12x_1^2+24x_1x_2+2x_2^2$

6.36 $6x_1^2+4x_1x_2+9x_2^2$

6.37 $7x_1^2-60x_1x_2+32x_2^2$

6.38 $10x_1^2+6x_1x_2+2x_2^2$

6.39 $x_1^2-24x_1x_2+11x_2^2$

6.40 $5x_1^2-12x_1x_2+5x_2^2$

6.2. Упражнения

Задана квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3)$ над полем действительных чисел. Найти ее матрицу и матрицу замены переменных, приводящих это форму к канонической. Проверить непосредственной заменой переменных.

6.41 $6x_1^2-4x_1x_2+5x_2^2+4x_1x_3+7x_3^2$

6.42 $x_1^2+2x_1x_2+5x_2^2-4x_1x_3-4x_3^2$

6.43 $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$

6.44 $4x_1^2-4x_1x_2+x_2^2+4x_1x_3-3x_2x_3+x_3^2$

6.45 $11x_1^2+16x_1x_2+5x_2^2+4x_1x_3-20x_2x_3+2x_3^2$

6.46 $x_1^2-6x_1x_2+x_2^2+6x_1x_3-6x_2x_3+5x_3^2$

6.47 $x_1^2+4x_1x_2+x_2^2+4x_1x_3+4x_2x_3+x_3^2$

6.48 $17x_1^2-4x_1x_2+14x_2^2-4x_1x_3-8x_2x_3+14x_3^2$

Проверить, является ли заданная квадратичная форма положительно определенной.

6.49 $2x_1^2-2x_1x_2+5x_2^2+6x_1x_3-4x_2x_3+5x_3^2+2x_1x_4+4x_3x_4+3x_4^2$

6.50 $4x_1^2-4x_1x_2+2x_2^2+2x_2x_3+3x_3^2+4x_1x_4-2x_2x_4+2x_3x_4+3x_4^2$

6.51 $3x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2+2x_2x_3+4x_3^2+4x_1x_4-2x_2x_4+2x_3x_4+x_4^2$

6.52 $5x_1^2+4x_1x_2+2x_2^2+2x_1x_3+2x_2x_3+4x_3^2+2x_2x_4-6x_3x_4+x_4^2$

6.3. Примеры решения заданий

Пример 6.1. Задана квадратичная форма над полем действительных чисел. Найти ее матрицу и матрицу замены переменных, приводящих это форму к канонической. Проверить непосредственной заменой переменных.

$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 10x_1x_2 + x_2^2$.

Так как $10 = 2 \cdot 5$, то матрица квадратичной формы есть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения – корни характеристического уравнения $(1-\alpha)(1-\alpha) - 5 \cdot 5 = 0$ или $1 - 2\alpha + \alpha^2 - 25 = \alpha^2 - 2\alpha - 24 = 0$. Решаем квадратное уравнение

$$\alpha_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - (-24)} = 1 \pm 5$$

Собственному значению $\alpha_1 = 6$ соответствует собственный вектор (метод нахождения собственного вектора приведен в параграфе 5.3)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для нормирования поделим на $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Собственному значению $\alpha_2 = -4$ соответствует собственный вектор

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

После нормирования получается

$$v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Матрица замены переменных составляется из столбцов координат нормированных собственных векторов:

$$C = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, замена $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y_2$, $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y_2$ приводит квадратичную форму к каноническому виду.

Проверка:

$$f(y_1,y_2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right)^2+10\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1-\frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1-\frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right)^2=\frac{1}{2}\big(y_1^2+2y_1y_2+y_2^2+10(y_1^2-y_2^2)+$$
$$+y_1^2-2y_1y_2+y_2^2\big)=\frac{1}{2}\left(12y_1^2-8y_2^2\right)=6y_1^2-4y_2^2.$$

Заметим, что коэффициенты канонической формы равны собственным значениям матрицы исходной квадратичной формы.

Пример 6.2. Проверить, является ли заданная квадратичная форма положительно определенной.

$2x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2+6x_1x_3+2x_2x_3+5x_3^2+2x_1x_4+2x_3x_4+3x_4^2$.

Матрица данной формы есть

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ее главные угловые миноры:

$$M_1 = 2 > 0;$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 > 0;$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 30 + 3 + 3 - (27 + 5 + 2) = 2 > 0;$$

$$M_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} + 0 - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -(1+15-1-9)-(6+1-9-1)+3\cdot 2 = -6+3+6 = 3 > 0.$$

При вычислении последнего определителя использовали разложение по четвертой строке (см. следствие из теоремы Лапласа, глава 2).

Так как все четыре главных угловых минора больше нуля, то эта квадратичная форма является положительно определенной.

Заключение

Настоящее пособие служит дополнением к учебникам, приведенным в списке литературы. В этих учебниках подробно изложен теоретический материал, но недостаточно много примеров и заданий для самостоятельной работы.

При отборе материала для заданий авторы в первую очередь стремились к более или менее равной сложности для всех вариантов. Навыки, приобретенные при решении этих заданий, впоследствии пригодятся при изучении других математических и профессиональных дисциплин. Алгебраический подход, включающий матрицы, многочлены, комплексные числа, собственные векторы, широко распространен в современной науке и технике.

Литература

[1] *Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А.* Алгебра. Т. 1. М.: Гелиос АРВ, 2003.

[2] *Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А.* Алгебра. Т. 2. М.: Гелиос АРВ, 2003.

[3] *Горюшкин А.П., Горюшкин В.А.* Элементы абстрактной и компьютерной алгебры. Т. 1. Петропавловск-Камчатский : Изд-во КамГУ, 2008.

[4] *Горюшкин А.П., Горюшкин В.А.* Элементы абстрактной и компьютерной алгебры. Т. 2. Петропавловск-Камчатский : Изд-во КамГУ, 2009.

[5] *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Часть I. М.: Физматлит, 2004.

Оглавление

Введение 3
Глава 1. Алгебраические структуры 4
Глава 2. Матрицы 15
Глава 3. Многочлены 31
Глава 4. Комплексные числа 46
Глава 5. Линейные преобразования 56
Глава 6. Квадратичные формы 66

Учебное издание

Бесценный Игорь Павлович
Мякишева Елена Васильевна
Бесценная Елена Владимировна

АЛГЕБРА

Учебное пособие

Сертификат соответствия № РОСС RU.AE51.H15612
Срок действия с 02.08.2011 г. по 01.08.2012 г.

Издается в авторской редакции.
Макет подготовлен при участии Издательства ОмГУ

Подписано в печать 21.05.2012. Формат бумаги 60x84 1/16.
Печ. л. 4,75. Усл. печ. л. 4,4. Уч.-изд. л. 3,6.
Тираж 200 экз. Заказ 164.

Издательство Омского государственного университета
644077, Омск-77, пр. Мира, 55а
Отпечатано на полиграфической базе ОмГУ
644077, Омск-77, пр. Мира, 55а