

Преобразование Фурье

Преобразование Фурье – это семейство математических методов, основанных на разложении исходной непрерывной функции от времени на совокупность базисных гармонических функций (в качестве которых выступают синусоидальные функции) различной частоты, амплитуды и фазы.

Преобразование Фурье является основоположником спектрального анализа. Спектральный анализ – это способ обработки сигналов, который позволяет охарактеризовать частотный состав измеряемого сигнала. В зависимости от того, каким образом представлен сигнал, используют разные преобразования Фурье.

Различают несколько видов преобразования Фурье:

- Непрерывное преобразование Фурье (в англоязычной литературе Continue Time Fourier Transform – **CTFT** или, сокращенно, **FT**);
- Дискретное преобразование Фурье (в англоязычной литературе Discrete Fourier Transform – **DFT**);
- Быстрое преобразование Фурье (в англоязычной литературе Fast Fourier transform – **FFT**).

Непрерывное преобразование Фурье

Преобразование Фурье является математическим инструментом, применяемым в различных научных областях. В некоторых случаях его можно использовать как средство решения сложных уравнений, описывающих динамические процессы, которые возникают под воздействием электрической, тепловой или световой энергии. В других случаях оно позволяет выделять регулярные составляющие в сложном колебательном сигнале, благодаря чему можно правильно интерпретировать экспериментальные наблюдения в астрономии, медицине и химии. Непрерывное преобразование фактически является обобщением рядов Фурье при условии, что период разлагаемой функции устремить к бесконечности. Таким образом, классическое преобразование Фурье имеет дело со спектром сигнала, взятым во всем диапазоне существования переменной.

Существует несколько видов записи непрерывного преобразования Фурье, отличающихся друг от друга значением коэффициента перед интегралом (две формы записи):

$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \quad \text{или} \quad F_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \cdot dt$$

Следует отметить, что разные виды записи встречаются в различных областях науки и техники. Нормировочный коэффициент необходим для корректного масштабирования сигнала из частотной области во временную. Нормировочный коэффициент уменьшает амплитуду сигнала на выходе обратного преобразования для того чтобы она совпадала с амплитудой исходного сигнала. В математической литературе прямое и обратное преобразование Фурье

умножаются на множитель $\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}}$, в то время как в физике чаще всего при прямом преобразовании множитель не ставят, а при обратном ставят множитель $\frac{1}{2 \cdot \pi}$. Если последовательно рассчитать прямое преобразование Фурье некоторого сигнала, а после взять обратное преобразование Фурье, то результат обратного преобразования должен полностью совпадать с исходным сигналом.

- Если функция нечетная на интервале $(-\infty, +\infty)$, то преобразование Фурье может быть представлено через синус-функцию:

$$F_2(w) = \frac{2}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^{+\infty} f(t) \cdot \sin(w \cdot t) \cdot dt$$

- Если функция четная на интервале $(-\infty, +\infty)$, то преобразование Фурье может быть представлено через косинус-функцию:

$$F_2(w) = \frac{2}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^{+\infty} f(t) \cdot \cos(w \cdot t) \cdot dt$$

Непрерывное преобразование Фурье

Таким образом, непрерывное преобразование Фурье позволяет представить непериодическую функцию в виде интеграла функции, представляющей в каждой своей точке коэффициент ряда Фурье для непериодической функции.

Преобразование Фурье является обратимым, то есть если по функции $f(t)$ был рассчитан ее Фурье-образ $F(\omega)$, то по Фурье-образу можно однозначно восстановить исходную функцию $f(t)$. Под обратным преобразованием Фурье понимают интеграл вида (две формы записи):

$$f_1(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \cdot d\omega \quad \text{или} \quad f_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \cdot d\omega$$

- Если функция нечетная на интервале $(-\infty, +\infty)$, то обратное преобразование Фурье может быть представлено через синус-функцию:

$$f(t) = \frac{2}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^{+\infty} F_2(\omega) \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot d\omega$$

- Если функция четная на интервале $(-\infty, +\infty)$, то обратное преобразование Фурье может быть представлено через косинус-функцию:

$$f(t) = \frac{2}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^{+\infty} F_2(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot d\omega$$

Дискретное преобразование Фурье

Непрерывное преобразование Фурье используют, как правило, в теории при рассмотрении сигналов, которые изменяются в соответствии с заданными функциями, но на практике обычно имеют дело с результатами измерений, которые представляют собой дискретные данные. Результаты измерений фиксируются через равные промежутки времени с определённой частотой дискретизации, например, 16000 Гц или 22000 Гц.

Дискретное преобразование Фурье — это одно из преобразований Фурье, широко применяемых в алгоритмах цифровой обработки сигналов.

- Прямое дискретное преобразование Фурье ставит в соответствие временной функции $f(n)$, которая определена N -точками измерений на заданном временном интервале, другую функцию $F(k)$, которая определена на частотном интервале.

Формула прямого преобразования Фурье в дискретном времени показывает степень сходства сигнала с комплексными экспонентами различной частоты, а соответствующее обратное преобразование позволяет «собрать» сигнал из этих комплексных экспонент.

Преобразование Фурье в дискретном времени

В зависимости от того, является сигнал функцией непрерывного времени или дискретной последовательностью, а также от того, является ли он периодическим, используются разные варианты преобразования Фурье.

Сейчас мы рассмотрим вариант преобразования Фурье, который работает с бесконечными во времени дискретными последовательностями. Эта версия называется *преобразованием Фурье в дискретном времени* (Discrete-Time Fourier Transform, DTFT) иногда также называемым дискретно-временным преобразованием Фурье (ДВПФ).

Спектр Фурье – это мера сходства сигнала с комплексными экспонентами разной частоты, а мера сходства сигналов, как мы видели ранее, измеряется их *взаимной корреляцией*, или, что то же самое, *скалярным произведением*. Поэтому расчет преобразования Фурье в дискретном времени сводится к вычислению взаимной корреляции между анализируемым сигналом $x(k)$ и комплексным дискретным гармоническим сигналом:

$$X(\tilde{\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\tilde{\omega}k}.$$

Преобразование Фурье в дискретном времени

$$X(\tilde{\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\tilde{\omega}k}.$$

Вычисление этой корреляционной суммы дает функцию непрерывной переменной $\tilde{\omega}$ – Фурье-спектр $X(\tilde{\omega})$. Этот спектр показывает, как данная корреляция зависит от частоты. Вследствие неоднозначности понятия частоты дискретного гармонического сигнала Фурье-спектр является периодической функцией частоты с периодом 2π рад/отсчет.

Далее результат вычисления преобразования Фурье в дискретном времени будет называться просто *спектром дискретного сигнала*.

Условие существования. Чтобы преобразование Фурье в дискретном времени существовало, необходимо, чтобы бесконечный ряд сходился. Он сходится на всех частотах, если последовательность $\{x(k)\}$ является *абсолютно суммируемой*: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)| < \infty$.

Обратное преобразование Фурье в дискретном времени

Формула прямого преобразования Фурье в дискретном времени показывает степень сходства сигнала с комплексными экспонентами различной частоты, а соответствующее обратное преобразование позволяет «собрать» сигнал из этих комплексных экспонент.

Формула обратного преобразования Фурье в дискретном времени имеет следующий вид:

$$x(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\tilde{\omega}) e^{j\tilde{\omega}k} d\tilde{\omega}.$$

Докажем, что в результате применения этой формулы действительно получатся отсчеты сигнала $x(k)$. Для этого подставим в нее спектр $X(\tilde{\omega})$, представленный в виде прямого преобразования Фурье в дискретном времени (переменная k используется для обозначения номера рассчитываемого отсчета сигнала, поэтому индекс суммирования придется заменить, например, на m):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\tilde{\omega}) e^{j\tilde{\omega}k} d\tilde{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{-j\tilde{\omega}m} e^{j\tilde{\omega}k} d\tilde{\omega}.$$

Обратное преобразование Фурье в дискретном времени

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\tilde{\omega}) e^{j\tilde{\omega}k} d\tilde{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{-j\tilde{\omega}m} e^{j\tilde{\omega}k} d\tilde{\omega}.$$

Далее меняем местами суммирование и интегрирование, оставляя под интегралом только те множители, которые зависят от переменной интегрирования $\tilde{\omega}$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\tilde{\omega}) e^{j\tilde{\omega}k} d\tilde{\omega} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\tilde{\omega}(k-m)} d\tilde{\omega}.$$

Интеграл от комплексной экспоненты легко вычисляется:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\tilde{\omega}(k-m)} d\tilde{\omega} = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m \end{cases} = \delta(k - m).$$

С учетом этого получаем, что результат действительно равен $x(k)$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\tilde{\omega}) e^{j\tilde{\omega}k} d\tilde{\omega} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \delta(k - m) = x(k).$$

Свойства преобразования Фурье в дискретном времени

Рассмотренные свойства преобразования Фурье в дискретном времени, касающиеся преобразований сигналов, сведены в табл.

Название	Временная область	Частотная область
Линейность	$y(k) = a x_1(k) + b x_2(k)$	$Y(\tilde{\omega}) = a X_1(\tilde{\omega}) + b X_2(\tilde{\omega})$
Задержка	$y(k) = x(k - k_0)$	$Y(\tilde{\omega}) = X(\tilde{\omega})e^{-j\tilde{\omega}k_0}$
Свертка	$y(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(k - m)$	$Y(\tilde{\omega}) = X_1(\tilde{\omega})X_2(\tilde{\omega})$
Произведение	$y(k) = x_1(k)x_2(k)$	$Y(\tilde{\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\tilde{\omega}')X_2(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}')d\tilde{\omega}'$

Знание этих свойств и спектров некоторых элементарных сигналов может позволить получить спектр искомого сигнала без явного использования формулы.

Комплексное ДПФ

До сих пор мы рассматривали ДПФ от действительных сигналов. Обобщим теперь ДПФ на случай комплексных сигналов. Пусть $x[n]$, $n=0,\dots,N-1$ – исходный комплексный сигнал, состоящий из N комплексных чисел. Обозначим $X[k]$, $k=0,\dots,N-1$ – его комплексный спектр, также состоящий из N комплексных чисел. Тогда справедливы следующие формулы прямого и обратного преобразований Фурье (здесь $j = \sqrt{-1}$):

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-jnk(2\pi/N)}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{jnk(2\pi/N)}$$

Если по этим формулам разложить в спектр действительный сигнал, то первые $N/2+1$ комплексных коэффициентов спектра будут совпадать (с точностью до нормирующих множителей) со спектром «обычного» действительного ДПФ, представленным в «комплексном» виде, а остальные коэффициенты будут их симметричным отражением относительно половины частоты дискретизации. Для косинусных коэффициентов отражение четное, а для синусных – нечетное.

Дискретное преобразование Фурье

Вычисление преобразований Фурье требует очень большого числа умножений (около N^2) и вычислений синусов. Существует способ выполнить эти преобразования значительно быстрее: примерно за $N \cdot \log_2 N$ операций умножения. Этот способ называется *быстрым преобразованием Фурье* (БПФ, *FFT, fast Fourier transform*). Он основан на том, что среди множителей (синусов) есть много повторяющихся значений (в силу, например, периодичности синуса). Алгоритм БПФ группирует слагаемые с одинаковыми множителями, значительно сокращая число умножений. В результате быстродействие БПФ может в зависимости от N в сотни раз превосходить быстродействие стандартного алгоритма. При этом следует подчеркнуть, что алгоритм БПФ является точным. Он даже точнее стандартного, т.к. сокращая число операций, он приводит к меньшим ошибкам округления.

Однако у большинства алгоритмов БПФ есть особенность: они способны работать лишь тогда, когда длина анализируемого сигнала N является степенью двойки. Обычно это не представляет большой проблемы, так как анализируемый сигнал всегда можно дополнить нулями до необходимого размера. Число N называется *размером* или *длиной БПФ* (*FFT size*).

Быстрое преобразование Фурье

Как уже было сказано, дискретное преобразование Фурье N -точкам дискретного сигнала $f(n)$ ставит в соответствие N -комплексных спектральных отсчетов сигнала $F(k)$. Для вычисления одного спектрального отсчета требуется N операций комплексного умножения и сложения. Таким образом, вычислительная сложность алгоритма дискретного преобразования Фурье является квадратичной, другими словами требуется N^2 операций комплексного умножения и сложения.

Быстрое преобразование Фурье (БПФ, Fast Fourier transform - FFT) представляет собой определенный алгоритм вычисления, который позволяет уменьшить количество производимых действий относительно прямого (по формуле) вычисления ДПФ. В основе алгоритма заложено разбиение заданной последовательности отсчетов дискретного сигнала на несколько промежуточных последовательностей. Следует отметить, что алгоритм БПФ точнее стандартного ДПФ, т.к. при сокращении операций снижаются суммарные ошибки округления.

В настоящее время известны несколько алгоритмов быстрого преобразования Фурье, которые являются частными случаями единого алгоритма, базирующегося на задаче разбиения одного массива чисел на два с последующим рекурсивном вычислении каждого массива чисел по дискретному преобразованию Фурье и объединении результатов расчетов.

Двумерное ДПФ

Для изображений, представляющих собой двумерный сигнал, спектром является также двумерный сигнал. Базисные функции преобразования Фурье

имеют вид произведений
$$h_{k_1, k_2}^{\sin}(n_1, n_2) = \sin \frac{2\pi k_1 n_1}{N_1} \cdot \sin \frac{2\pi k_2 n_2}{N_2}$$

и

$$h_{k_1, k_2}^{\cos}(n_1, n_2) = \cos \frac{2\pi k_1 n_1}{N_1} \cdot \cos \frac{2\pi k_2 n_2}{N_2}.$$

Здесь $N_1 \times N_2$ – размер исходного сигнала, он же – размер спектра. k_1 и k_2 – это номера базисных функций (номера коэффициентов двумерного ДПФ, при которых эти функции находятся). Поскольку размер спектра равен размеру исходного сигнала, то $k_1 = 0, \dots, N_1-1$; $k_2 = 0, \dots, N_2-1$.

n_1 и n_2 – переменные-аргументы базисных функций. Поскольку область определения базисных функций совпадает с областью определения сигнала, то $n_1 = 0, \dots, N_1-1$; $n_2 = 0, \dots, N_2-1$.

Двумерное ДПФ определяется следующими формулами (здесь $x[n_1, n_2]$ – исходный сигнал, а $X[k_1, k_2]$ – его спектр):

$$X[k_1, k_2] = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x[n_1, n_2] \cdot e^{-jn_1 k_1 (2\pi/N_1)} e^{-jn_2 k_2 (2\pi/N_2)}$$

$$x[n_1, n_2] = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} X[k_1, k_2] \cdot e^{jn_1 k_1 (2\pi/N_1)} e^{jn_2 k_2 (2\pi/N_2)}$$

Двумерное ДПФ

$$X[k_1, k_2] = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x[n_1, n_2] \cdot e^{-jn_1 k_1 (2\pi/N_1)} e^{-jn_2 k_2 (2\pi/N_2)}$$

$$x[n_1, n_2] = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} X[k_1, k_2] \cdot e^{jn_1 k_1 (2\pi/N_1)} e^{jn_2 k_2 (2\pi/N_2)}$$

Непосредственное вычисление двумерного ДПФ по приведенным формулам требует огромных вычислительных затрат. Однако можно доказать, что двумерное ДПФ обладает свойством сепарабельности, т.е. его можно вычислить отдельно по двум измерениям. Для вычисления двумерного ДПФ достаточно вычислить одномерные комплексные ДПФ всех строк изображения, а затем вычислить в результирующем «изображении» одномерные комплексные ДПФ всех столбцов. При этом результаты всех одномерных комплексных ДПФ нужно записывать на место исходных данных для этих ДПФ. Например, при вычислении одномерного ДПФ первой строки изображения нужно результат ДПФ записать в первую строку этого изображения (он имеет тот же размер). Для этого нужно каждый «пиксель» хранить в виде комплексного числа.

Таким образом, эффективный алгоритм вычисления ДПФ изображения заключается в вычислении одномерных БПФ сначала от всех строк, а потом – от всех столбцов изображения.

Применения ДПФ

Спектральный анализ

Часто ДПФ применяется для наблюдения и анализа спектра сигнала. При этом обычно наиболее интересными являются лишь амплитуды C_k отдельных гармоник, а не их фазы. В этом случае спектр обычно отображается в виде графика зависимости амплитуды от частоты (рис.). Часто шкала амплитуд градуируется в децибелах. *Децибелы* измеряют не сами амплитуды, а их отношения. Например, разница на 20 дБ означает различие амплитуд в 10 раз, разница на 40 дБ означает отношение амплитуд в 100 раз. Различию амплитуд в 2 раза отвечает разница примерно в 6 дБ. Шкала частот также часто градуируется в логарифмическом масштабе.

Перед вычислением спектра сигнала нужно выбрать отрезок сигнала, на котором будет вычисляться спектр. Длина отрезка должна быть степенью двойки (для работы БПФ). Иначе сигнал надо дополнить нулями до нужной длины. После этого к выбранному участку сигнала применяют БПФ.

Коэффициенты амплитуд считают по формуле $C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$.

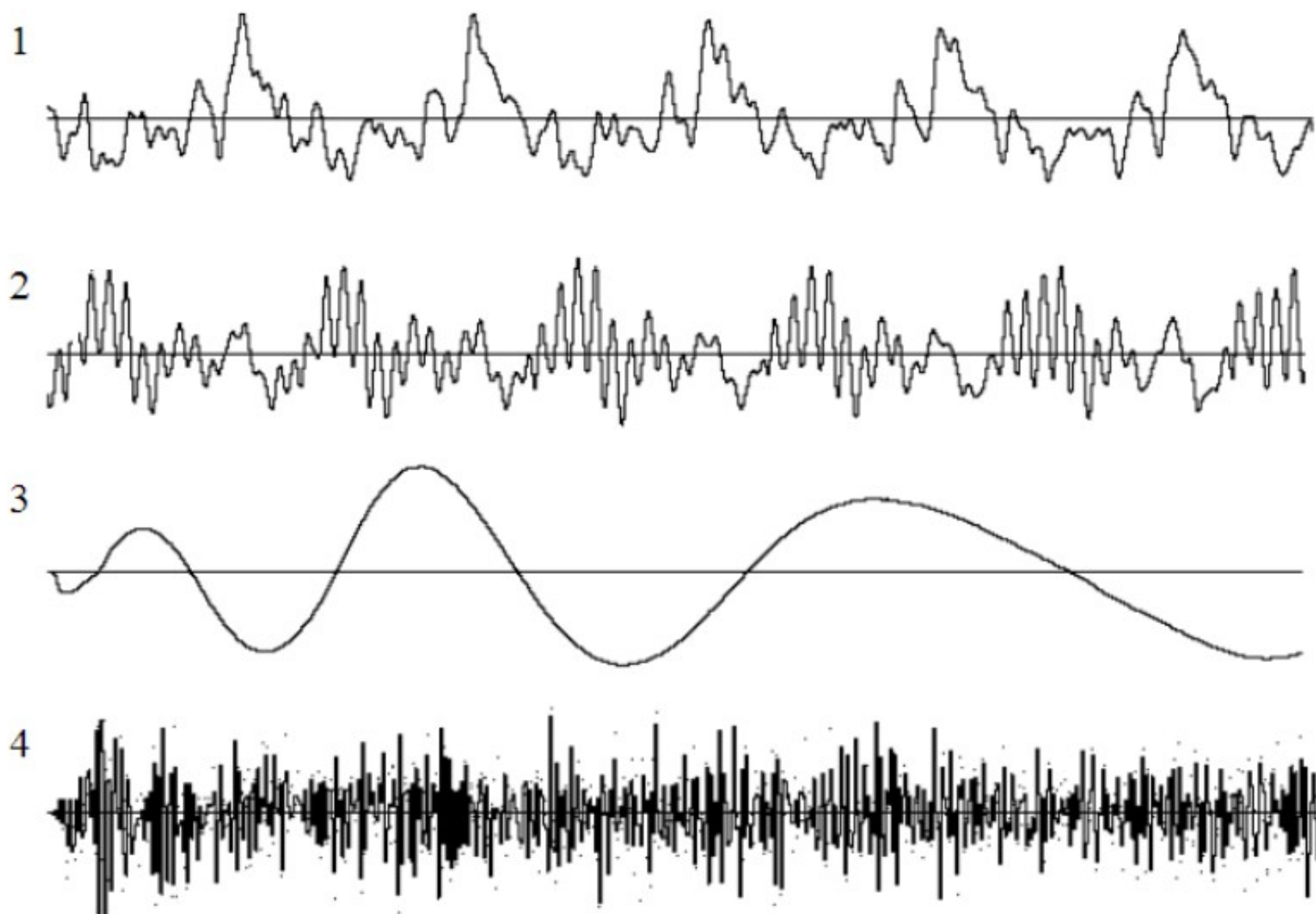


Рис. Фрагменты различных сигналов (около 800 точек). Сверху вниз: нота на фортепиано, голос (пение), барабан (бочка), тарелка (открытый хэт).

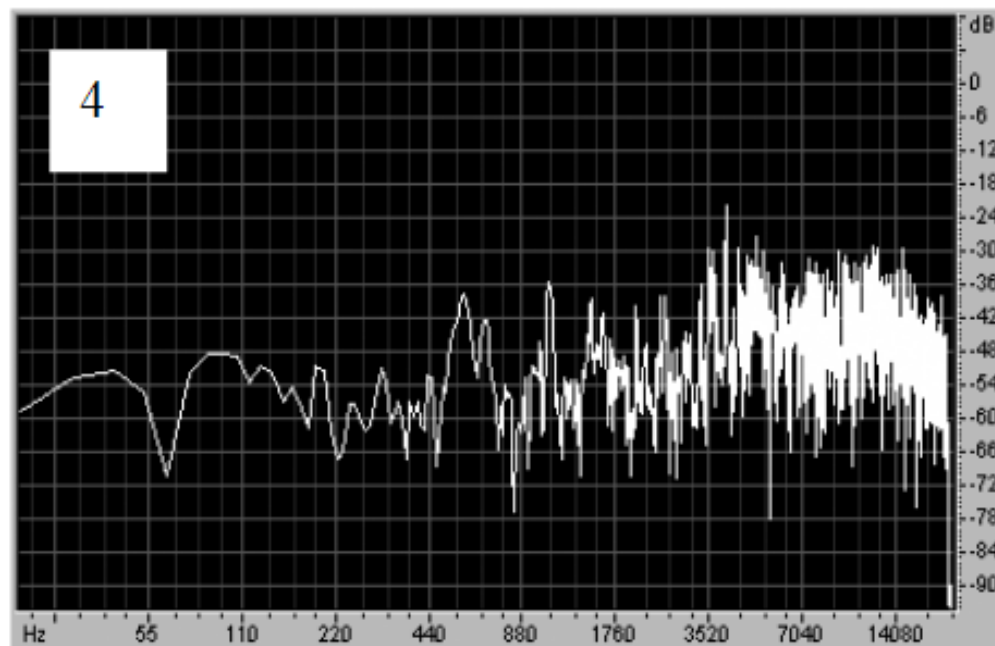
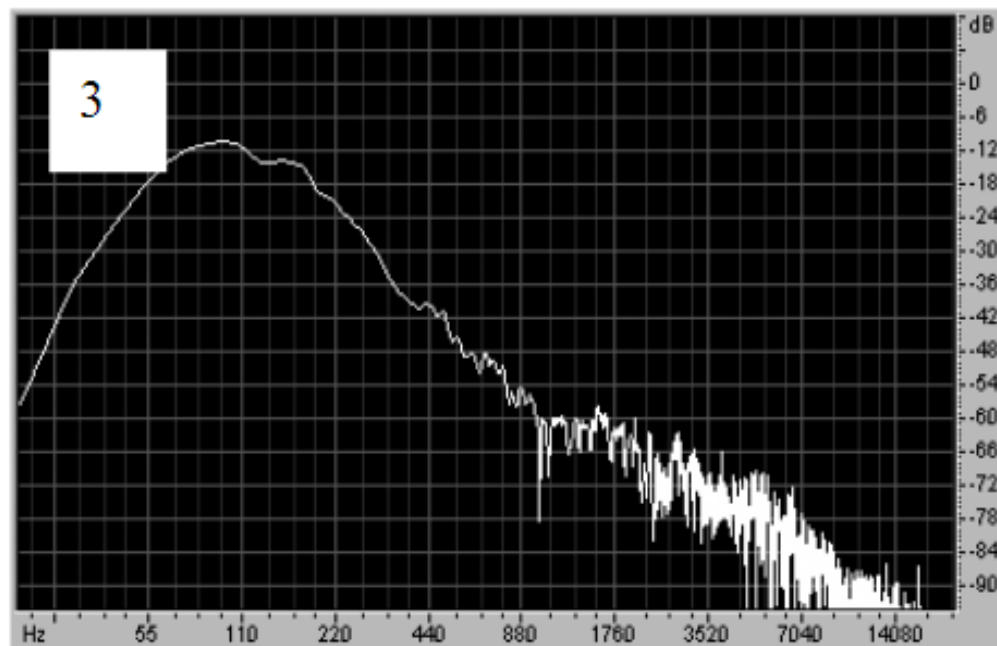
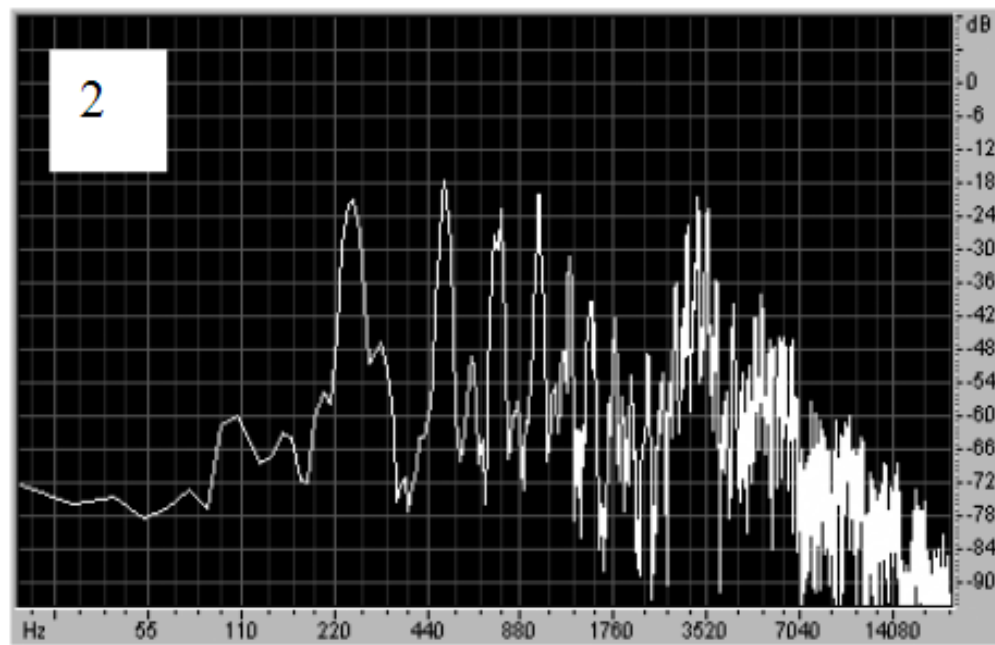
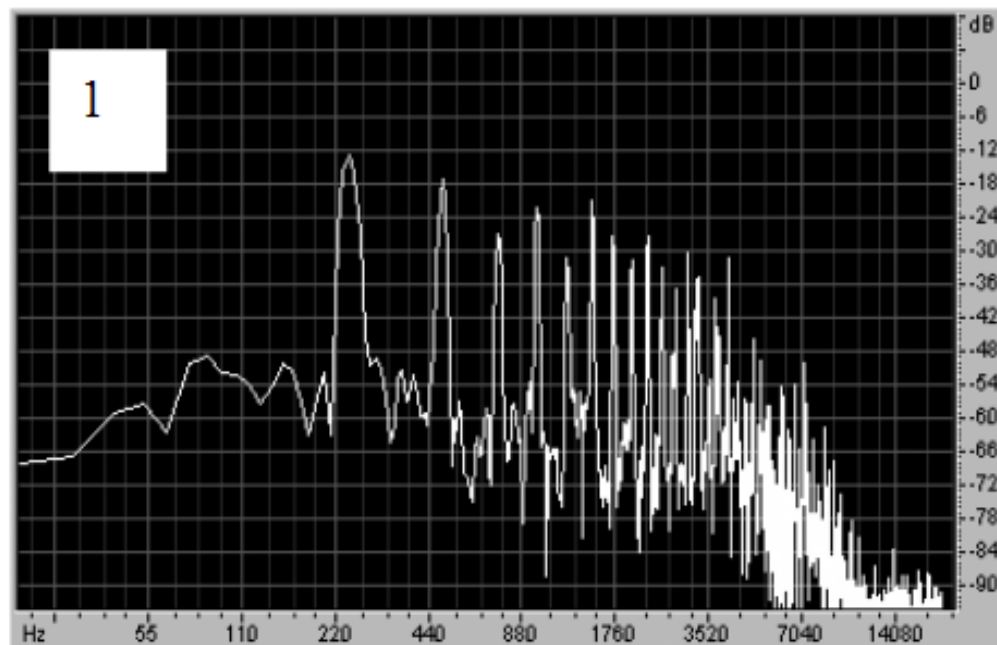


Рис. Спектры более длинных отрезков этих сигналов (4096 точек).

Перед вычислением спектра сигнала нужно выбрать отрезок сигнала, на котором будет вычисляться спектр. Длина отрезка должна быть степенью двойки (для работы БПФ). Иначе сигнал надо дополнить нулями до нужной длины. После этого к выбранному участку сигнала применяют БПФ.

Коэффициенты амплитуд считают по формуле $C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$.

При вычислении спектра указанным образом возможен следующий нежелательный эффект. При разложении функции в ряд Фурье мы полагаем, что функция периодическая, с периодом, равным размеру БПФ. Вычисляется спектр именно такой функции (а не той, из которой мы извлекли кусок). При этом на границах периодов такая функция наверняка будет иметь разрывы (ведь исходная функция не была периодической). А разрывы в функции сильно отражаются на ее спектре, искажая его.

Для устранения этого эффекта применяются так называемые *взвешивающие окна*. Они плавно сводят на нет функцию вблизи краев анализируемого участка. Весовые окна имеют форму, похожую на гауссиан. Выбранный для анализа участок сигнала домножается на весовое окно, которое устраняет разрывы функции при «зацикливании» данного участка сигнала. «Зацикливание» происходит при ДПФ, так как алгоритм ДПФ полагает, что функция периодическая. Существует множество весовых окон, названных в честь их создателей. Все они имеют похожую форму и в значительной степени устраняют рассмотренные искажения спектра.

Окно Хэмминга $w_{Hammin g}[n] = 0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{N}$

Окно Блэкмана $w_{Blackman}[n] = 0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{N} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{N}$

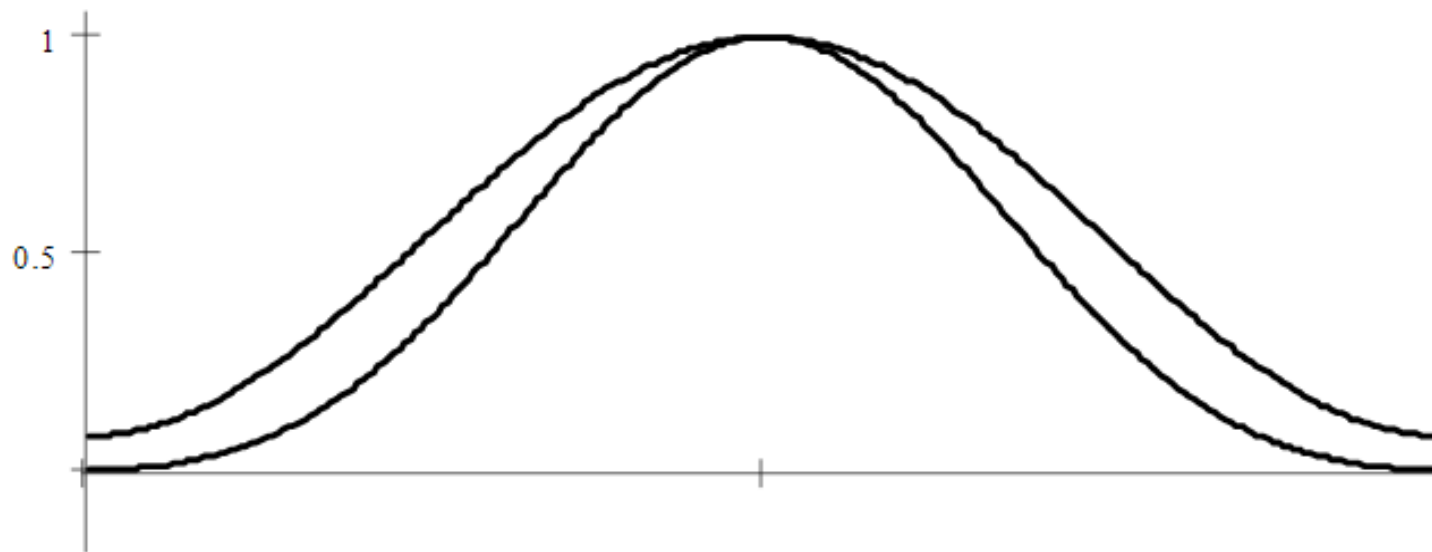


Рис. Взвешивающие окна Хэмминга (верхнее) и Блэкмана (нижнее).

Здесь окно применяется к сигналу с индексами от 0 до N. Окно Хэмминга наиболее часто используется. Окно Блэкмана обладает более сильным действием по устранению рассмотренных искажений, однако имеет свои недостатки.

Применения ДПФ

Спектральный анализ

Важное свойство спектрального анализа заключается в том, что не существует одного, единственно правильного спектра какого-либо сигнала. Спектр можно вычислять с применением различных размеров БПФ и различных весовых окон. Для каждого конкретного приложения предпочтительно использовать свои способы.

Еще одно важное свойство заключается в том, что при разложении в спектр мы находим не те синусоидальные составляющие, из которых состоял исходный сигнал, а лишь находим, с какими амплитудами нужно взять определенные кратные частоты, чтобы получить исходный сигнал. Другими словами, разложение проводится не по «частотам источника», а по «частотам алгоритма БПФ». Однако обычно (особенно при использовании весовых окон) этого почти не заметно по графику спектра, то есть график спектра достаточно адекватно отображает именно частоты исходного сигнала.

Быстрая свертка и корреляция. Теорема свертки.

Свертка – основной процесс в цифровой обработке сигналов. Поэтому важно уметь эффективно ее вычислять. Прямое вычисление свертки требует $N \cdot M$ умножений, где N – длина исходного сигнала, а M – длина ядра свертки. Часто длина ядра свертки достигает нескольких тысяч точек, и число умножений становится огромным.

Однако существует алгоритм, позволяющий вычислить свертку значительно быстрее. Этот алгоритм основан на следующей важной теореме:

Теорема свертки: свертка во временной области эквивалентна умножению в частотной области; умножение во временной области эквивалентно свертке в частотной области.

Это значит, что для выполнения свертки двух сигналов можно перевести их в частотную область, умножить их спектры и перевести их обратно во временную область. Такая операция выглядит громоздко. Однако с появлением алгоритмов БПФ, позволяющих быстро вычислять преобразования Фурье, вычисление свертки через частотную область стало широко использоваться. При значительных длинах ядра свертки такой подход позволяет в сотни раз сократить время вычисления свертки.

Быстрая свертка и корреляция

Кратко опишем алгоритм вычисления быстрой свертки. Сначала исходный сигнал длины N и ядро свертки длины M дополняются (справа) нулями до длины L (L – степень двойки), причем так, что $L \geq N + M - 1$. Затем вычисляются ДПФ этих двух сигналов. Затем спектры сигналов необходимо перемножить как состоящие из комплексных чисел, т.е. образовать новый спектр из коэффициентов A_k^{new} и B_k^{new} , получающихся по формуле:

$$A_k^{new} + iB_k^{new} = (A_k^{old1} + iB_k^{old1}) \cdot (A_k^{old2} + iB_k^{old2}), \text{ где } k = 0, \dots, \frac{L}{2}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Затем из полученного спектра с помощью обратного ДПФ вычисляется сигнал, состоящий из L точек. Этот сигнал и содержит результат свертки из $N+M-1$ точек, дополненный нулями до L точек.

Часто возникает потребность вычислить свертку очень длинного сигнала, не помещающего в памяти компьютера, с относительно коротким ядром свертки. В таких случаях применяется так называемая *секционная свертка*. Суть ее состоит в том, что длинный сигнал разбивается на более короткие части и каждая из этих частей сворачивается с ядром отдельно. Затем полученные части объединяются для получения окончательного результата. Для объединения полученных частей достаточно их разместить друг за другом с наложением (перекрытием) в $M-1$ точку, где M – длина ядра свертки. В местах перекрытия необходимо произвести суммирование. Обычно для ускорения вычислений размер секции входного сигнала выбирается одного порядка с длиной свертки.

Отметим, что поскольку корреляцию можно вычислять с помощью свертки, то рассмотренный алгоритм быстрой свертки подходит и для быстрого вычисления корреляции.

Фильтрация

Эффект от умножения спектров сигналов при свертке называется *фильтрацией*. Когда спектры умножаются как комплексные числа, происходит умножение амплитуд гармоник C_i исходного сигнала и ядра свертки (а фазы складываются). Таким образом, мы получаем возможность менять спектр сигнала. Это очень полезная операция. Например, в звукозаписи изменение спектра сигнала позволяет очищать запись от шумов, компенсировать искажения сигнала различными устройствами звукозаписи, менять тембры инструментов, акцентировать внимание слушателя на отдельных партиях. В обработке изображений фильтрация позволяет применять к изображению разные эффекты: размытие, подчеркивание границ, тиснение и многие другие. В других областях фильтрация часто служит для разделения различных сигналов, смешанных в один, очищения сигнала от шумов. Также фильтрация является составным компонентом многих других, более сложных процессов.

Ядро свертки при фильтрации обычно называют *фильтром*. Часто фильтром называется также все устройство, которое осуществляет процесс фильтрации. *Длина (размер) фильтра* – это длина ядра свертки.

В общем случае, фильтр меняет в спектре сигнала и амплитуды гармоник, и их фазы. Однако фильтры можно проектировать так, чтобы они не меняли фазу сигнала. Такие фильтры называются *фильтрами с линейной фазой*.

Фильтрация

В общем случае, фильтр меняет в спектре сигнала и амплитуды гармоник, и их фазы. Однако фильтры можно проектировать так, чтобы они не меняли фазу сигнала. Такие фильтры называются *фильтрами с линейной фазой*. Это означает, что если они и меняют фазу сигнала, то делают это так, что все гармоники сигнала сдвигаются по времени на одну и ту же величину. Таким образом, фильтры с линейной фазой не искажают фазу сигнала, а лишь сдвигают весь сигнал во времени. Ядро свертки такого фильтра строго симметрично относительно своей центральной точки (хотя бывают типы фильтров с линейной фазой, где ядро антисимметрично).

Основное свойство любого фильтра – это его *частотная (frequency response) и фазовая характеристики*. Они показывают, какое влияние фильтр оказывает на амплитуду и фазу различных гармоник обрабатываемого сигнала. Если фильтр имеет линейную фазу, то рассматривается только частотная характеристика фильтра. Обычно частотная характеристика изображается в виде графика зависимости амплитуды от частоты (в децибелах). Например, если фильтр пропускает все сигналы в полосе 0...10 кГц без изменения, а все сигналы в полосе выше 10 кГц подавляет в 2 раза (на 6 дБ), то частотная

характеристика будет выглядеть так:
$$A(f) = \begin{cases} 0\text{дБ}, f < 10\text{кГц} \\ -6\text{дБ}, f > 10\text{кГц} \end{cases} \quad (\text{рис.}).$$

Фильтрация

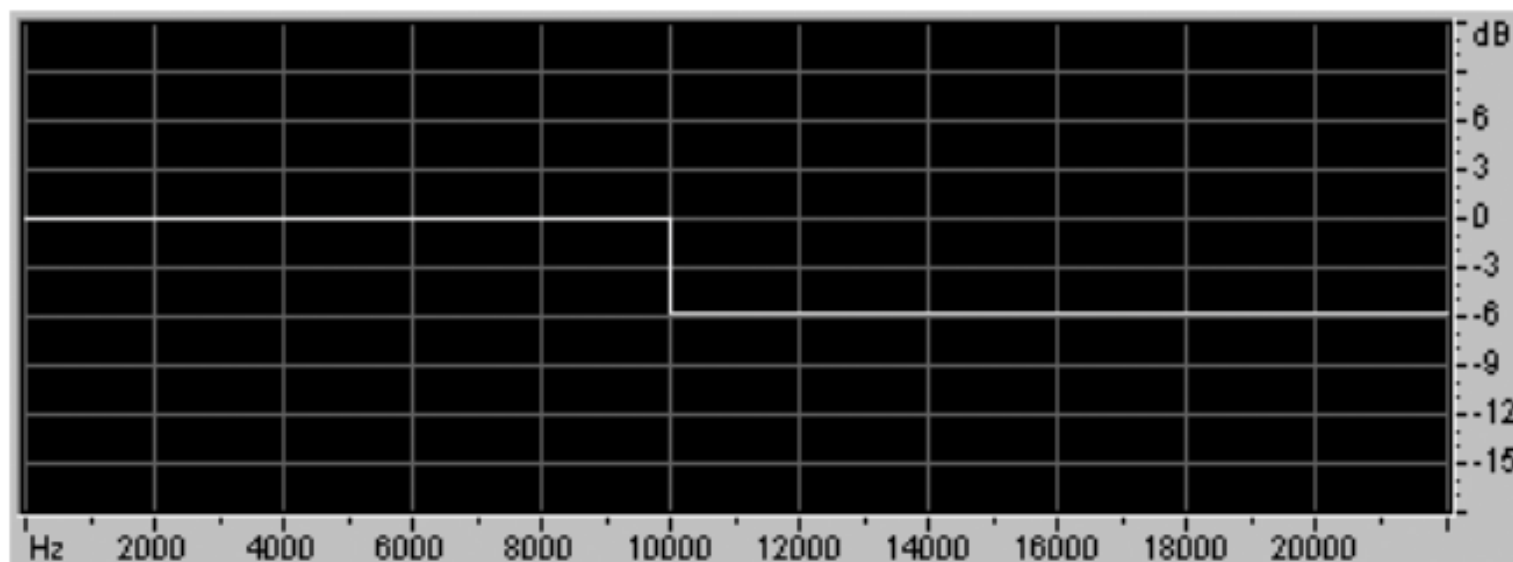


Рис. Пример частотной характеристики фильтра.

$$A(f) = \begin{cases} 0\text{дБ}, f < 10\text{кГц} \\ -6\text{дБ}, f > 10\text{кГц} \end{cases} \quad (\text{рис.}).$$

Частотная характеристика в 0 дБ показывает, что данные частоты фильтр пропускает без изменения. Те частоты, амплитуда которых ослабляется фильтром в 2 раза, должны иметь амплитуду на 6 дБ меньше. Поэтому их амплитуда составляет -6 дБ. Если бы фильтр усиливал какие-то частоты, то его частотная характеристика была бы на этих частотах положительная (в децибелах).

Фильтрация

В зависимости от общего вида частотной характеристики можно выделить следующие распространенные типы фильтров: НЧ-фильтры (*low-pass filters*), ВЧ-фильтры (*high-pass filters*), полосовые фильтры, которые пропускают (*band-pass filters*) или подавляют (*band-reject filters*) сигнал только в определенной частотной полосе. Существуют и другие типы фильтров с более сложными частотными характеристиками.

Обычно в задачах фильтрации сигнала для фильтра задается требуемая частотная характеристика. Целью является построить фильтр, отвечающий заданным требованиям и провести фильтрацию. Часто бывает невозможно построить в точности заданный фильтр. Тогда строится фильтр, близкий по характеристикам к заданному.

Например, невозможно построить *идеальный фильтр низких частот*, то есть такой, который пропускает без изменения все сигналы ниже определенной частоты (в *полосе пропускания, pass band*) и полностью подавляет все сигналы выше этой частоты (в *полосе подавления* или *непропускания, stop band*). Реальные фильтры низких частот обладают более плавной частотной характеристикой (рис.). Они не являются идеальными. Это значит, что они слегка изменяют сигнал и в полосе пропускания. А в полосе подавления они не совершенно подавляют сигнал, а делают это, скажем, в 1000 раз. Их частотная характеристика обычно выглядит примерно так: до частоты среза она достаточно ровная (0 дБ почти без отклонений), на частоте среза она начинает плавно спадать. Крутизна спада и значения после спада определяются конкретным фильтром и требованиями к нему.

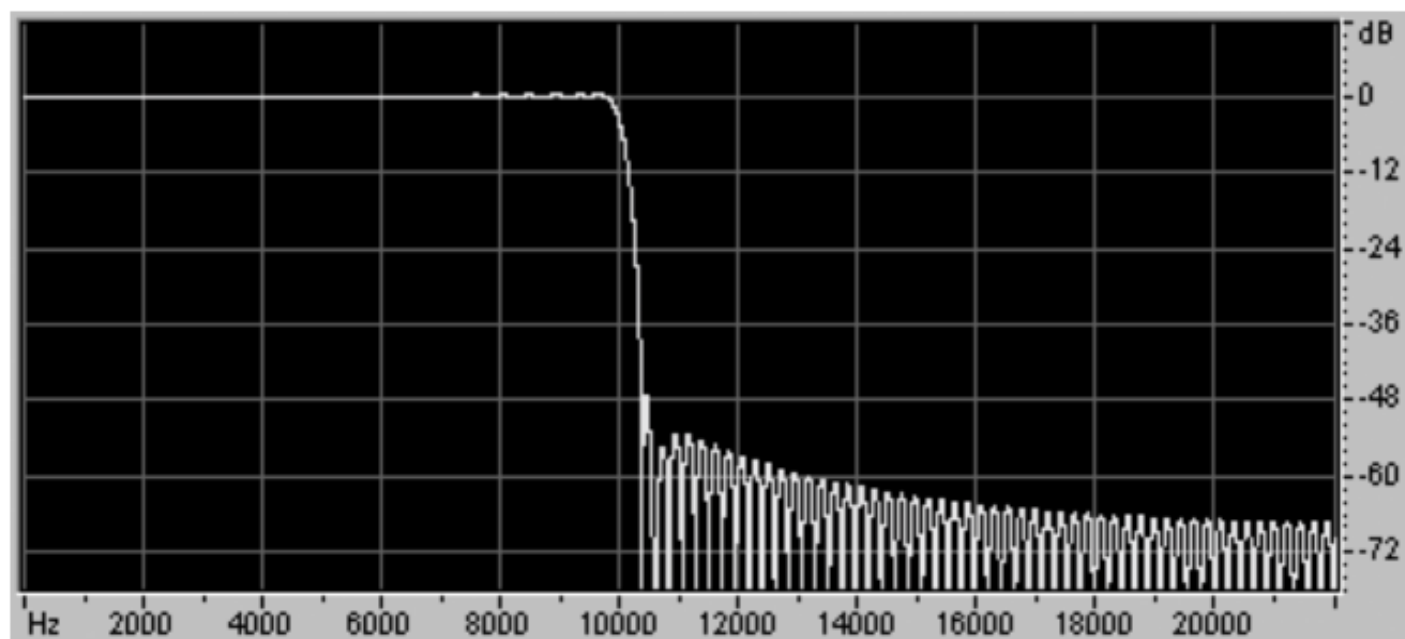
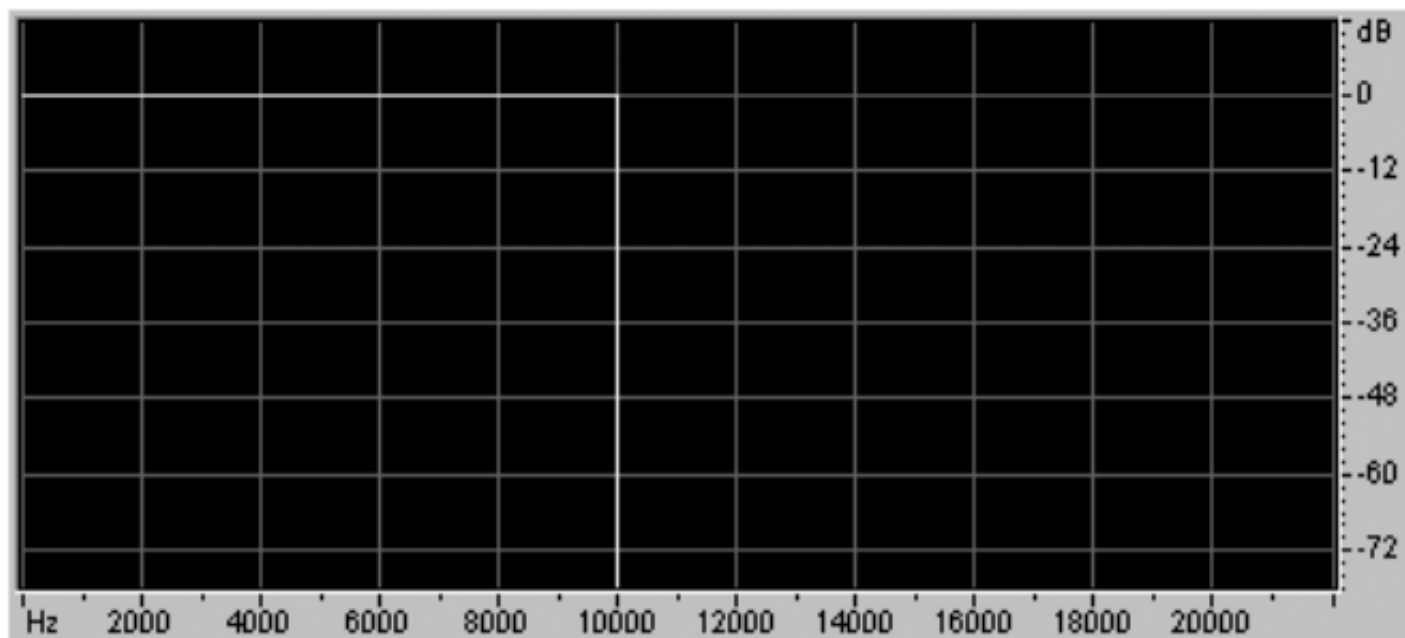


Рис. Частотные характеристики идеального (сверху) и одного из реальных НЧ-фильтров.

Фильтрация

Например, требования к реальному НЧ-фильтру могут быть такими: в полосе пропускания от 0 до 9500 Гц он должен иметь частотную характеристику 0 дБ с максимально возможным отклонением ± 0.5 дБ. От 9500 Гц до 10500 Гц (в *переходной полосе*) частотная характеристика должна спадать. Выше 10500 Гц (в полосе подавления) фильтр должен подавлять все частоты не менее чем на 50 дБ. Это значит, что частотная характеристика фильтра в полосе подавления должна лежать ниже -50 дБ. Такой фильтр вполне возможно спроектировать.

Часто к фильтрам предъявляются более сложные требования. Например, фильтр может иметь несколько частотных полос пропускания и непропускания. Причем для полос пропускания могут быть заданы разные коэффициенты усиления. А для полос непропускания могут быть заданы разные коэффициенты подавления. Иногда требуемая частотная характеристика фильтра задается вообще произвольной кривой.

Существует множество способов построения фильтров с заданной частотной характеристикой. Мы кратко рассмотрим один из них. Это проектирование фильтров с линейной фазой с помощью взвешивающих окон. Этот способ является универсальным, т.к. позволяет получить фильтр с любой заданной частотной характеристикой. В то же время он достаточно прост и широко применяется. Недостаток метода в том, что с помощью других методов иногда удастся построить фильтр немного меньшей длины, удовлетворяющий тем же требованиям к частотной характеристике.

Фильтрация

Пусть частотная характеристика требуемого фильтра задана. Первый шаг при построении фильтра – это определение его размера. Размер фильтра определяется приблизительно из следующих соображений. Если частотная характеристика плавная, без сильных изломов или разрывов, то размер фильтра можно взять небольшой, иначе – большой. Если требуется точно следовать частотной характеристике, то размер фильтра должен быть большой, если допускаются отклонения от частотной характеристики, то размер фильтра можно уменьшить. Обычно сначала стоит попробовать построить фильтр размера порядка 1000 и оценить его соответствие заданной частотной характеристике. Если соответствие достаточное, то можно попытаться построить более короткий фильтр, скажем – из 501 точки. Если же фильтр плохо отвечает частотной характеристике, нужно построить более длинный фильтр. Итак, пусть мы определили, что будем строить фильтр длины N . Желательно, чтобы N было нечетным числом.

Идея метода состоит в том, чтобы получить требуемое ядро свертки как обратное преобразование Фурье от требуемой частотной характеристики. Размер обратного преобразования выбирается не меньшим, чем длина фильтра, и равным степени двойки.

Фильтрация

Идея метода состоит в том, чтобы получить требуемое ядро свертки как обратное преобразование Фурье от требуемой частотной характеристики. Размер обратного преобразования выбирается не меньшим, чем длина фильтра, и равным степени двойки. Пусть мы выбрали размер БПФ L . Для выполнения обратного преобразования Фурье необходимо иметь спектр сигнала на $\frac{L}{2} + 1$ частотах, равномерно распределенных между 0 и половиной частоты дискретизации. Для этого сделаем соответствующую выборку из заданной частотной характеристики. Если частотная характеристика задана в децибелах, ее значения нужно перевести в «обыкновенные» значения амплитуд: 0 дБ – в 1.0, -6 дБ – в 0.5 и т.д. В полосе непропускания можно положить амплитуды строго равными нулю.

Теперь, когда значения частотной характеристики на заданных частотах выбраны, можно перевести эту частотную характеристику во временную область. Для выполнения обратного ДПФ нужно кроме амплитуд гармоник задать их фазы. Так как мы хотим получить фильтр с линейной фазой, то полагаем все фазы равными нулю. После этого переводим спектр из полярного представления («амплитуда-фаза») в прямоугольное ($A_k + iB_k$). Так как все фазы нулевые, то все точки спектра представляют собой «действительные числа». То есть в массив A_k без изменения загружаются амплитуды, а в массив B_k – нули. После этого выполняется обратное преобразование Фурье, в результате которого мы получаем сигнал $x[n]$, $n=0, \dots, L-1$, имеющий заданный спектр.

Фильтрация

Однако полученный сигнал не очень хорошо подходит в качестве ядра свертки. Чтобы получить из него подходящее ядро свертки, нужно выполнить 2 шага. Первый шаг заключается в том, чтобы выбрать другой период сигнала, полученного в качестве ядра свертки. Когда мы проделали обратное ДПФ, мы получили один период бесконечного периодического сигнала. Теперь наша задача «развернуть» этот период в периодический сигнал и выбрать другие границы периода. Границы должны быть такими, чтобы центр нового отрезка совпадал с $x[0]$, и длина нового отрезка была равна выбранной длине фильтра N . Сигнал с этого нового отрезка и принимается за ядро фильтра. Если все было сделано правильно, ядро получается симметричное относительно точки $x[0]$. На практике для «разворачивания» ядра достаточно скопировать массив $x[0, \dots, L-1]$ в массив $x[-L, \dots, -1]$ и выбрать из этого массива отрезок $x[-\frac{N-1}{2}, \dots, x[\frac{N-1}{2}]$.

Последний шаг при построении фильтра заключается в том, чтобы применить к ядру взвешивающее окно. Смысл этой операции в том, чтобы улучшить свойства фильтра. Выбор взвешивающего окна определяется необходимой степенью подавления в полосах непропускания фильтра. Разные весовые окна по-разному влияют на этот параметр. Свойства и формулы весовых окон можно найти в книгах по цифровой обработке сигналов. Обычно хорошим выбором является окно Хэмминга. При необходимости еще большего подавления применяется окно Блэкмана.

Фильтрация

Последний шаг при построении фильтра заключается в том, чтобы применить к ядру взвешивающее окно. Смысл этой операции в том, чтобы улучшить свойства фильтра. Выбор взвешивающего окна определяется необходимой степенью подавления в полосах непропускания фильтра. Разные весовые окна по-разному влияют на этот параметр. Свойства и формулы весовых окон можно найти в книгах по цифровой обработке сигналов. Обычно хорошим выбором является окно Хэмминга. При необходимости еще большего подавления применяется окно Блэкмана.

После применения окна, можно оценить реальную частотную характеристику полученного фильтра. Для этого применяется метод спектрального анализа.

Размер БПФ выбирается, как правило, примерно в 4 раза больше размера фильтра, фильтр дополняется до нужного размера нулями, и производится ДПФ (весовые окна применять не нужно). По графику спектра можно определить степень соответствия фильтра требованиям к частотной характеристике. Если соответствие имеется, то проектирование фильтра закончено (хотя можно попытаться построить фильтр меньшего размера, чтобы сократить вычисления на этапе фильтрации). Если соответствие недостаточно, то нужно попытаться построить фильтр большего размера.

После получения готового ядра фильтра, его можно использовать для проведения операции свертки (фильтрации). Пример действия фильтра на спектр сигнала можно увидеть на рис. Заметим, что эффект от фильтрации, заключающийся в перемножении спектров, при логарифмическом масштабе амплитуд соответствует сложению амплитуд в децибелах.

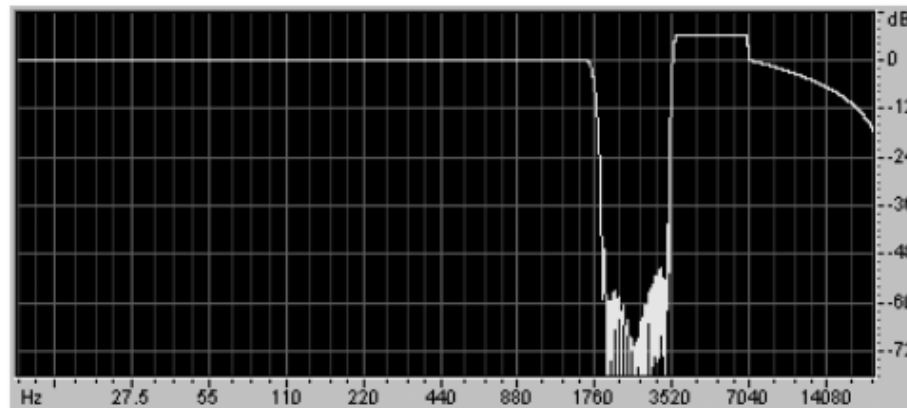
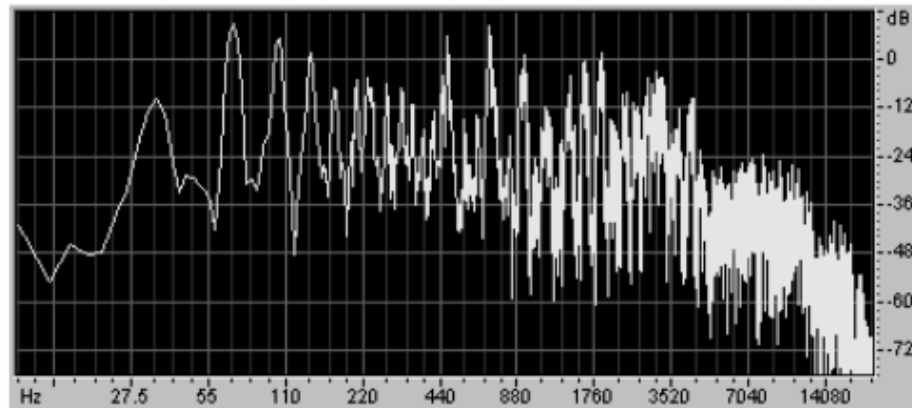
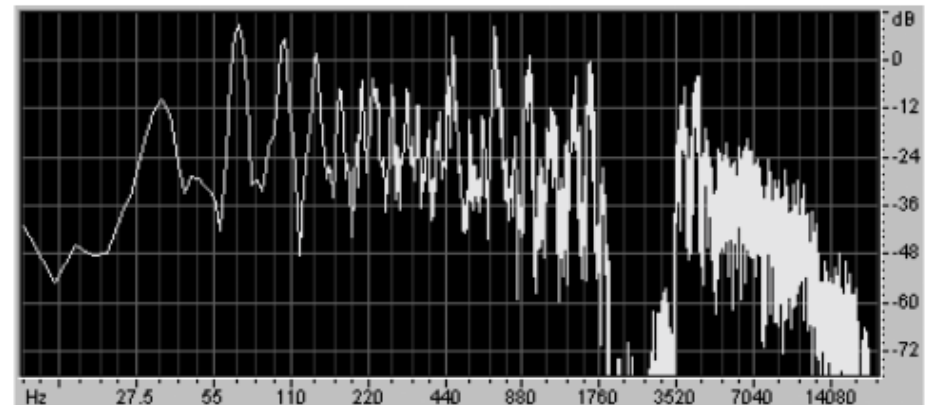


Рис. Фильтрация звукового сигнала.

*Сверху вниз: спектр исходного сигнала,
частотная характеристика фильтра,
спектр сигнала после фильтрации.*



Деконволюция

Часто возникает необходимость восстановить сигнал после искажения его какой-либо линейной системой. Для такого восстановления необходимо хотя бы приблизительно знать частотную характеристику искажающей системы. Например, после записи звука недостаточно качественным микрофоном можно попытаться исправить записанный звук. Для этого нужно знать частотную характеристику микрофона (то есть то, как он меняет амплитуды гармоник в зависимости от их частоты). Часто она указывается в паспорте микрофона. Так как микрофон мы считаем линейной системой, то он осуществляет свертку исходного сигнала с некоторым ядром. Восстановление (хотя бы приближенное) исходного сигнала по свернутому называется *деконволюцией* (*deconvolution*).

Восстановление исходного сигнала во временной области проделать очень сложно. Зато частотная область позволяет выполнить деконволюцию вполне естественно. Достаточно учесть, что свертка в частотной области соответствует перемножению спектров сигналов. Причем спектр ядра свертки микрофона известен (это его частотная характеристика). Значит, восстановить исходный сигнал можно поделив спектр свернутого сигнала на спектр ядра свертки.

Итак, для выполнения деконволюции нужно построить фильтр (назовем его восстанавливающим), с частотной характеристикой, обратной искажающему, и выполнить свертку искаженного сигнала с этим фильтром.

Деконволюция

Итак, для выполнения деконволюции нужно построить фильтр (назовем его восстанавливающим), с частотной характеристикой, обратной искажающему, и выполнить свертку искаженного сигнала с этим фильтром.

Отметим, что построить такой фильтр не всегда возможно и не всегда целесообразно. Если искажающий фильтр какие-то частоты полностью подавляет, то, очевидно, восстановить их не удастся. Кроме того, гармоники, которые были подавлены достаточно сильно, могут оказаться ниже уровня шума обрабатывающей системы. В этом случае попытка их восстановления приведет к значительному усилению шума на данных частотах.

Кроме того, пока мы не затрагивали вопрос фазовых искажений, а полагали, что искажающая система обладает линейной фазовой характеристикой, и строили восстанавливающий фильтр тоже с линейной фазой. Но если искажающая система вносит в сигнал и фазовые искажения, то для их исправления приходится строить фильтр, который их компенсирует.

Однако не всегда требуется избавляться и от фазовых искажений. Например, при восстановлении сигнала с микрофона это обычно необязательно, так как наше ухо почти нечувствительно к фазовым искажениям звука.

Таким образом, мы видим, что далеко не всегда удастся полностью восстановить исходный сигнал по свернутому. Но приблизиться к исходному сигналу в несколько раз вполне возможно.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Преобразование Лапласа — это интегральное преобразование, связывающее функцию $F(p)$ комплексного переменного (*изображение*) с функцией $f(t)$ вещественного переменного (*оригинал*):

$$F(p) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad \text{где } p = c + j\omega.$$

С его помощью исследуются свойства динамических систем и решаются дифференциальные и интегральные уравнения.

Одной из особенностей преобразования Лапласа, которые предопределили его широкое распространение в научных и инженерных расчётах, является то, что многим соотношениям и операциям над оригиналами соответствуют более простые соотношения над их изображениями. Так, свёртка двух функций сводится в пространстве изображений к операции умножения, а линейные дифференциальные уравнения становятся алгебраическими.

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Прямое дискретное преобразование Лапласа

В теории непрерывных систем переход от непрерывного оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ осуществляется с помощью преобразования Лапласа:

$$F(p) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (1)$$

Это позволяет осуществлять переход от исходных дифференциальных уравнений к передаточным функциям. При этом, обеспечивается более наглядное представление объекта и возможность исследования систем в частотной области при замене оператора p комплексной частотой $j\omega$.

В теории дискретных систем переход от решетчатых функций к дискретному изображению осуществляется аналогично. Дискретное преобразование решетчатой функции можно рассматривать как обычное преобразование Лапласа непрерывной функции, модулированной последовательностью импульсных функций:

$$F^*(p) = L[f^*[nT]] = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f(t) \delta(t - nT) e^{-pt} dt. \quad (2)$$

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Прямое дискретное преобразование Лапласа

Кратко дискретное преобразование Лапласа (или D-преобразование) записывается следующим образом:

$$F^*(p) = L[f^*(t)] = D[f[nT]] = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT] e^{-pnT}. \quad (4)$$

По сравнению с обычным преобразованием Лапласа для непрерывных оригиналов, интеграл заменен на сумму, а непрерывная переменная t на дискретную nT .

Пример 1.

Определить дискретное преобразование Лапласа для единичной функции $f(t) = 1(t)$.

Решение: Применяя формулу дискретного преобразования Лапласа, получим:

$$F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT] e^{-pnT} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-pnT} = \frac{1}{1 - e^{-pT}}.$$

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА И Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Прямое дискретное преобразование Лапласа

Если изображения непрерывных сигналов являются степенными уравнениями - $f(p^n)$, то изображения дискретных функций являются показательными уравнениями - $f(e^{pnT})$, следовательно, к ним нельзя применять аппарат теории непрерывных систем.

Если ввести новую переменную $z = e^{pT}$, тогда вместо (4) будем иметь:

$$F(z) = F^*(p = \frac{1}{T} \ln z) = Z[f[nT]] = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n}, \quad (5)$$

где для сокращения записи введено $f[n] = f[nT]$.

Это выражение представляет собой **Z-преобразование**, которое широко используется в литературе импульсных систем. Основное его преимущество — компактная форма записи. При использовании Z-преобразования получаем степенные уравнения, что позволяет применять методы исследования непрерывных систем для дискретных систем.

Дискретное преобразование Лапласа (**D-преобразование**) более удобно для проведения аналогии между свойствами непрерывных и импульсных систем, так как в том и другом случае изображения решетчатой являются функцией комплексной переменной.

Свойства z -преобразования

Сводка рассмотренных свойств z -преобразования приведена в табл.

Таблица. Свойства z -преобразования

Название	Временная область	Z -область
Линейность	$y(k) = a x_1(k) + b x_2(k)$	$Y(z) = a X_1(z) + b X_2(z)$
Задержка	$y(k) = x(k - k_0)$	$Y(z) = X(z) z^{-k_0}$
Свертка	$y(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_2(k - m)$	$Y(z) = X_1(z) X_2(z)$
Чередование знаков	$y(k) = x(k) (-1)^k$	$Y(z) = X(-z)$
Инверсия во времени	$y(k) = x(-k)$	$Y(z) = X(z^{-1})$

Свойства z -преобразования показывают, как преобразования последовательностей отсчетов во времени отражаются в их z -преобразованиях. Эти свойства позволяют сильно упростить вычисления z -преобразований сигналов, если удастся представить их в виде комбинаций преобразованных элементарных «кирпичиков», причем эти свойства помогают в вычислении не только прямого, но и обратного z -преобразования.

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Цифровой фильтр — это цифровое устройство или способ обработки цифровых сигналов на ЭВМ, с помощью которых осуществляется выделение полезных сигналов в определенном диапазоне частот. Цифровой фильтр выполняет такую же задачу, как и аналоговый фильтр, выполненный на катушках, конденсаторах и резисторах.

Различают цифровые фильтры, реализованные в виде специализированной ЭВМ, включающей набор специализированных микросхем, и цифровые фильтры, реализованные в виде программы для универсальной ЭВМ. Специализированные ЭВМ, как правило, содержат запоминающие устройства и несколько арифметико-логических блоков сложения и умножения. Универсальные ЭВМ, напротив, как правило, строятся на одном быстродействующем процессоре.

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

И в первом, и во втором случаях можно выделить три базовых элемента, с использованием которых строится цифровой фильтр: элемент памяти (задержки), умножитель и сумматор. Условные обозначения этих элементов приведены на рис. 1, а, б, в, соответственно. В зависимости от реализации ЦФ под элементом понимается или специализированная микросхема, или оператор в программе. Для простоты шумами квантования в этих элементах в дальнейшем будем пренебрегать. Вместо цифровых сигналов в этом случае можно использовать дискретные сигналы.

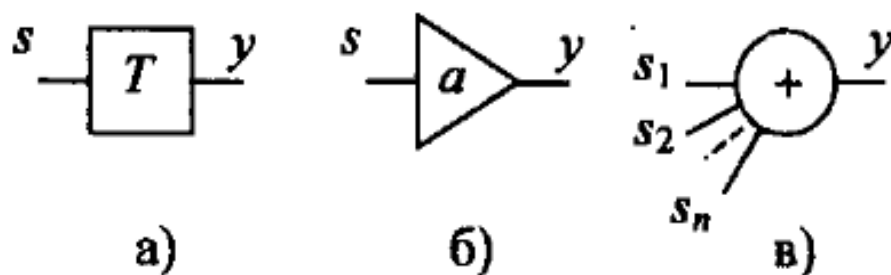


Рис. 1

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Дискретный сигнал $y(kt_D)$ на выходе цифрового элемента памяти (задержки) равен задержанному на один такт входному сигналу:

$$y(kt_D) = s(kt_D - t_D), \quad (1)$$

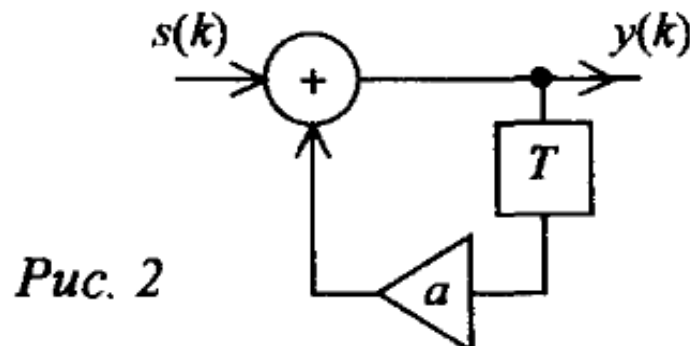
где номер отсчета $k = 0, 1, 2, \dots$; t_D — период дискретизации. В умножителе уровень входного сигнала изменяется в a раз:

$$y(kt_D) = a s(kt_D). \quad (2)$$

Сумматор осуществляет суммирование нескольких входных сигналов:

$$y(kt_D) = s_1(kt_D) + s_2(kt_D) + \dots + s_n(kt_D). \quad (3)$$

На рис. 2 в качестве примера приведена схема цифрового фильтра низких частот первого порядка. Порядок цифрового фильтра определяется числом элементов памяти.



ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

По сравнению с аналоговыми фильтрами цифровые фильтры имеют следующие преимущества. На низких частотах масса и габариты цифрового фильтра меньше, чем масса и габариты аналогового фильтра. Например, все три элемента цифрового фильтра, схема которого приведена на рис. 2, можно изготовить в одном микрочипе. В то же время аналоговый фильтр должен включать конденсаторы или катушки, имеющие на низких частотах большие вес и габариты. Цифровой фильтр в отличие от аналогового фильтра имеет стабильные параметры, которые не зависят от температуры, вибраций, влажности и т. п. Наконец, цифровой фильтр практически не требует настройки своих параметров и при правильном монтаже сразу готов к работе.

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Для цифрового фильтра основным сигналом при анализе его частотных характеристик является дискретный гармонический сигнал

$$s(kT_d) = S_m \cos(\omega kT_d + \varphi_0) = \operatorname{Re}\{\dot{S}_m e^{j\omega kT_d}\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Период дискретизации T_d гармонического сигнала выбирается так, чтобы частота дискретизации как минимум в два раза превышала частоту гармонического сигнала: $\omega_d \geq 2\omega$. Из формулы (4) следует, что дискретный гармонический сигнал, как и аналоговый, можно характеризовать комплексной амплитудой \dot{S}_m .

Рассмотрим преобразование гармонического сигнала и его комплексной амплитуды в элементах цифрового фильтра. При подаче сигнала (4) на вход умножителя сигнал на выходе умножителя в соответствии с (2) имеет вид

$$y(kT_d) = a \operatorname{Re}\{\dot{S}_m e^{j\omega kT_d}\} = \operatorname{Re}\{\dot{Y}_m e^{j\omega kT_d}\}, \quad (5)$$

где комплексная амплитуда $\dot{Y}_m = a\dot{S}_m$.

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Следовательно, комплексная амплитуда гармонического сигнала при прохождении через умножитель изменяется в a раз. В соответствии с (3) при подаче гармонических сигналов на сумматор сигнал на его выходе записывается в виде

$$y(kt_d) = \operatorname{Re}\{\dot{S}_{m1}e^{j\omega kt_d}\} + \operatorname{Re}\{\dot{S}_{m2}e^{j\omega kt_d}\} + \dots = \operatorname{Re}\{(\dot{S}_{m1} + \dot{S}_{m2} + \dots)e^{j\omega kt_d}\}.$$

Следовательно, комплексная амплитуда сигнала на выходе сумматора с n входами равна

$$\dot{Y}_m = \dot{S}_{m1} + \dot{S}_{m2} + \dots + \dot{S}_{mn}. \quad (6)$$

При подаче гармонического сигнала (4) на вход элемента памяти на его выходе в соответствии с (1) получим

$$y(kt_d) = s(kt_d - t_d) = \operatorname{Re}\{\dot{S}_m e^{j\omega(kt_d - t_d)}\} = \operatorname{Re}\{\dot{Y}_m e^{j\omega kt_d}\}, \quad (7)$$

где комплексная амплитуда выходного сигнала равна $\dot{Y}_m = \dot{S}_m e^{-j\omega t_d}$. Следовательно, гармонический сигнал при прохождении через элемент задержки приобретает дополнительный фазовый сдвиг.

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Из полученных формул (5), (6) и (7) следует, что все базовые элементы цифрового фильтра не изменяют форму гармонического сигнала. Изменяются только комплексные амплитуды. Так как цифровой фильтр любой сложности состоит только из трех рассмотренных элементов, то при подаче на вход цифрового фильтра гармонического сигнала на его выходе также получим гармонический сигнал.

Отношение комплексных амплитуд входного и выходного сигналов называется *дискретным комплексным коэффициентом передачи* цифрового фильтра

$$\dot{K}_д = \frac{\dot{Y}_m}{\dot{S}_m}. \quad (8)$$

Этот комплексный коэффициент передачи — основная характеристика цифрового фильтра. По его значениям можно определить полосу пропускаемых частот и тип фильтра.

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Используя (8), найдем дискретный коэффициент передачи цифрового фильтра первого порядка, схема которого приведена на рис. 2. Выходной сигнал этого фильтра поступает на вход элемента задержки. Комплексная амплитуда сигнала на выходе элемента памяти имеет вид $\dot{Y}_m e^{-j\omega t_d}$. С элемента памяти сигнал в свою очередь поступает на умножитель. На выходе умножителя получим комплексную амплитуду $a\dot{Y}_m e^{-j\omega t_d}$. Выходной сигнал с умножителя и входной сигнал $s(kt_d)$ поступают на два входа сумматора. Следовательно, комплексная амплитуда выходного сигнала цифрового фильтра равна $\dot{Y}_m = \dot{S}_m + a\dot{Y}_m e^{-j\omega t_d}$. Разделив левую и правую части этого равенства на комплексную амплитуду входного гармонического сигнала после преобразований, получим дискретный комплексный коэффициент передачи цифрового фильтра первого порядка:

$$\dot{K}_d = \frac{\dot{Y}_m}{\dot{S}_m} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega t_d}}.$$

Модуль этого коэффициента дает АЧХ цифрового фильтра.

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Для цифрового фильтра основным сигналом при анализе его частотных характеристик является дискретный гармонический сигнал

$$s(k\tau_d) = S_m \cos(\omega k\tau_d + \varphi_0) = \operatorname{Re}\{\dot{S}_m e^{j\omega k\tau_d}\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Период дискретизации τ_d гармонического сигнала выбирается так, чтобы частота дискретизации как минимум в два раза превышала частоту гармонического сигнала: $\omega_d \geq 2\omega$. Из формулы (4) следует, что дискретный гармонический сигнал, как и аналоговый, можно характеризовать комплексной амплитудой \dot{S}_m .

Рассмотрим преобразование гармонического сигнала и его комплексной амплитуды в элементах цифрового фильтра. При подаче сигнала (4) на вход умножителя сигнал на выходе умножителя в соответствии с (2) имеет вид

$$y(k\tau_d) = a \operatorname{Re}\{\dot{S}_m e^{j\omega k\tau_d}\} = \operatorname{Re}\{\dot{Y}_m e^{j\omega k\tau_d}\}, \quad (5)$$

где комплексная амплитуда $\dot{Y}_m = a\dot{S}_m$.

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Следовательно, комплексная амплитуда гармонического сигнала при прохождении через умножитель изменяется в a раз. В соответствии с (3) при подаче гармонических сигналов на сумматор сигнал на его выходе записывается в виде

$$y(kt_d) = \operatorname{Re}\{\dot{S}_{m1}e^{j\omega kt_d}\} + \operatorname{Re}\{\dot{S}_{m2}e^{j\omega kt_d}\} + \dots = \operatorname{Re}\{(\dot{S}_{m1} + \dot{S}_{m2} + \dots)e^{j\omega kt_d}\}.$$

Следовательно, комплексная амплитуда сигнала на выходе сумматора с n входами равна

$$\dot{Y}_m = \dot{S}_{m1} + \dot{S}_{m2} + \dots + \dot{S}_{mn}. \quad (6)$$

При подаче гармонического сигнала (4) на вход элемента памяти на его выходе в соответствии с (1) получим

$$y(kt_d) = s(kt_d - t_d) = \operatorname{Re}\{\dot{S}_m e^{j\omega(kt_d - t_d)}\} = \operatorname{Re}\{\dot{Y}_m e^{j\omega kt_d}\}, \quad (7)$$

где комплексная амплитуда выходного сигнала равна $\dot{Y}_m = \dot{S}_m e^{-j\omega t_d}$. Следовательно, гармонический сигнал при прохождении через элемент задержки приобретает дополнительный фазовый сдвиг.

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Из полученных формул (5), (6) и (7) следует, что все базовые элементы цифрового фильтра не изменяют форму гармонического сигнала. Изменяются только комплексные амплитуды. Так как цифровой фильтр любой сложности состоит только из трех рассмотренных элементов, то при подаче на вход цифрового фильтра гармонического сигнала на его выходе также получим гармонический сигнал.

Отношение комплексных амплитуд входного и выходного сигналов называется *дискретным комплексным коэффициентом передачи* цифрового фильтра

$$\dot{K}_д = \frac{\dot{Y}_m}{\dot{S}_m}. \quad (8)$$

Этот комплексный коэффициент передачи — основная характеристика цифрового фильтра. По его значениям можно определить полосу пропускаемых частот и тип фильтра.

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Используя (8), найдем дискретный коэффициент передачи цифрового фильтра первого порядка, схема которого приведена на рис. 2. Выходной сигнал этого фильтра поступает на вход элемента задержки. Комплексная амплитуда сигнала на выходе элемента памяти имеет вид $\dot{Y}_m e^{-j\omega t_d}$. С элемента памяти сигнал в свою очередь поступает на умножитель. На выходе умножителя получим комплексную амплитуду $a\dot{Y}_m e^{-j\omega t_d}$. Выходной сигнал с умножителя и входной сигнал $s(kt_d)$ поступают на два входа сумматора. Следовательно, комплексная амплитуда выходного сигнала цифрового фильтра равна $\dot{Y}_m = \dot{S}_m + a\dot{Y}_m e^{-j\omega t_d}$. Разделив левую и правую части этого равенства на комплексную амплитуду входного гармонического сигнала после преобразований, получим дискретный комплексный коэффициент передачи цифрового фильтра первого порядка:

$$\dot{K}_d = \frac{\dot{Y}_m}{\dot{S}_m} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega t_d}}.$$

Модуль этого коэффициента дает АЧХ цифрового фильтра.

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Модуль этого коэффициента дает АЧХ цифрового фильтра. График АЧХ цифрового фильтра при $a = 0,5$ приведен на рис. 3. Как видим, рассматриваемый фильтр является фильтром низких частот. Отметим, что в соответствии с теоремой Котельникова частота f входного гармонического сигнала, приведенная на рис. 3, изменяется в диапазоне от нуля до половины частоты дискретизации.

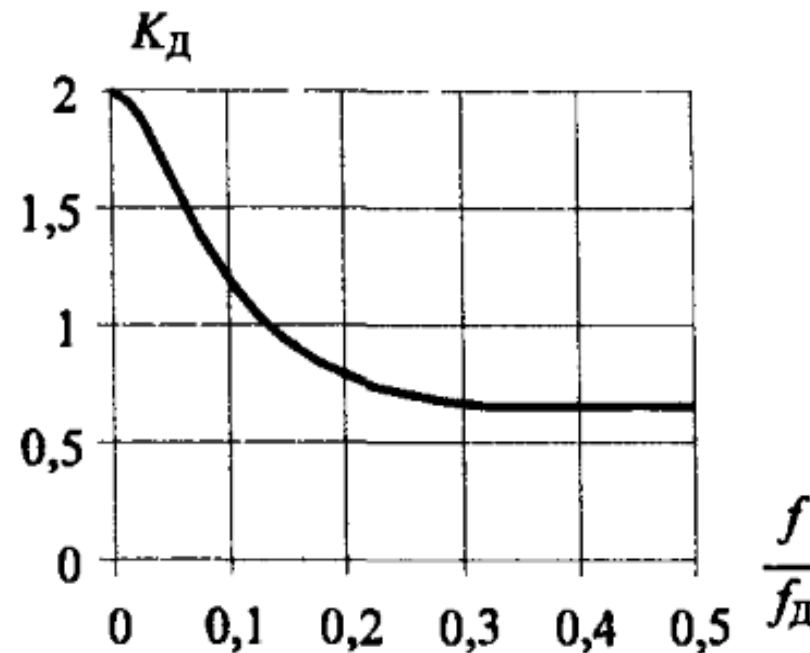


Рис. 3

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Цифровые фильтры предназначены прежде всего для решения двух основных задач:

- разделения двух и более распространяющихся совместно сигналов;
- восстановления сигналов, которые были искажены.

Для решения данных задач можно воспользоваться аналоговыми фильтрами, однако цифровые фильтры позволяют достичь намного более высокой (в тысячи раз) точности. При этом нужно учитывать, что цифровые фильтры работают гораздо медленнее аналоговых и имеют более узкий (ограниченный) динамический диапазон как по амплитуде, так и по частоте.

Существует три основных характеристики фильтров: **импульсная, переходная и частотная**. Каждая из них полностью определяет свойства линейного фильтра, т. е. содержит исчерпывающую информацию о его фильтрующих свойствах. Отличаются они лишь формой представления информации. Если задана одна из этих характеристик, то всегда можно рассчитать две другие.

Самый простой способ реализации цифрового фильтра – свертка входного сигнала с импульсной характеристикой. Данный способ позволяет построить любой практически реализуемый линейный фильтр. Такие цифровые фильтры называются **нерекурсивными** или **КИХ-фильтрами**.

Другая форма построения цифровых фильтров – **рекурсивные** или **БИХ-фильтры**. Они представляют собой более широкий класс фильтров и, кроме отчетов входного сигнала, учитывают также отчеты выходного сигнала, полученные на предыдущих итерациях.

ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

Импульсная характеристика является реакцией системы (фильтра) на единичный импульс. Импульсная характеристика рекурсивного фильтра может быть представлена в виде суммы синусоидальных сигналов с убывающей по экспоненциальному закону амплитудой. Это означает, что рекурсивный фильтр имеет импульсную характеристику бесконечной длины. Однако, начиная с некоторого момента времени (в 15-20 раз превышающий постоянную времени) амплитуда синусоидальных колебаний затухает настолько, что становится ниже уровня шумов окружения, поэтому последующими отсчетами импульсной характеристики можно пренебречь.

Второй важной временной характеристикой цифрового фильтра является **переходная характеристика**, которая определяется как реакция на единичный скачок (единичную ступенчатую функцию). Так как единичный скачок представляет собой интеграл от единичного импульса, то переходная характеристика связана с импульсной характеристикой интегральной зависимостью. Это означает, что переходную характеристику можно получить двумя способами:

- 1) подать на вход фильтра сигнал в виде единичного скачка и зафиксировать его выходную реакцию;
- 2) проинтегрировать импульсную характеристику.

Частотная характеристика (АЧХ или ЛАЧХ, при этом ФЧХ не важна, т. к. в большинстве практических приложений, связанных с обработкой сигналов в частотной области, фаза не играет роли) цифрового фильтра связана с его импульсной характеристикой ДПФ, для вычисления которого используется БПФ.

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Переходная характеристика описывает влияние системы (фильтра) на информацию, заложенную во временной области, а частотная характеристика описывает преобразование информации, заложенной в частотной области. Об этом нужно помнить при расчете фильтров, поскольку улучшение временных характеристик фильтра приводит к ухудшению его частотных свойств.

Если задача состоит в устранении шумов на ЭКГ (измеряемый сигнал представлен во временной области), то более важным является точное воспроизведение переходной характеристики фильтра, а частотная характеристика играет второстепенную роль. Если же фильтр планируется использовать в слуховом аппарате (информация содержится в частотной области), то важна только частотная характеристика, а переходная характеристика не представляет никакого интереса.

При проектировании цифровых высокочастотных, полосовых и режекторных (заграждающих) фильтров предварительно рассчитывают низкочастотный фильтр, а затем преобразуют его к желаемому виду. Именно по этой причине, говоря о расчете фильтров, чаще всего описывают только ФНЧ. Существует два метода преобразования ФНЧ в ФВЧ – *инверсия АЧХ* и *обращение АЧХ*. Оба метода нашли широкое распространение.

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

По области применения все цифровые фильтры можно разделить на три большие группы:

1) **фильтры временной обработки** (однородные КИХ-фильтры и однополюсные рекурсивные фильтры используются при решении таких задач, как сглаживание, устранение постоянной составляющей, формирование огибающей и т.д.);

2) **фильтры частотной обработки** (оконные КИХ-фильтры и рекурсивные фильтры Чебышева используются для разделения частотных диапазонов);

3) **специальные фильтры** (рекурсивные фильтры с итеративной структурой и специальные КИХ-фильтры используются для коррекции АЧХ канала связи или другой искажающей системы, оптимальной фильтрации).

По внутренней структуре различают:

1) **КИХ-фильтры** (основаны на операции свертки) характеризуются очень высокой точностью работы;

2) **БИХ-фильтры** (рекурсивные фильтры) значительно выигрывают КИХ-фильтры в быстродействии.

Однородные КИХ-фильтры

Однородные КИХ-фильтры получили наиболее широкое распространение в ЦОС, благодаря простоте реализации. Кроме того, они являются оптимальными при решении такой классической задачи ЦОС, как подавление аддитивного шума при одновременном сохранении скорости нарастания переходной характеристики. Эти фильтры превосходят все остальные виды цифровых фильтров при обработке информации, представленной во временной области. В то же время эти фильтры оказываются малоэффективны при обработке информации в частотной области, так как не способны разделять между собой сигналы, лежащие в разных диапазонах частот. Имеется несколько модификаций однородных фильтров, в которых частотная избирательность повышается за счет увеличения времени обработки: фильтр Гаусса, фильтр Блэкмана и фильтр с многократной обработкой.

Однородные КИХ-фильтры часто называют **фильтрами скользящего среднего**, потому что они основаны на усреднении некоторого множества отсчетов входного сигнала, что описывается следующим разностным уравнением:

$$y[i] = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} x[i+j],$$

где $x[]$ – входной сигнал, $y[]$ – выходной сигнал, M – число усредняемых отсчетов.

В данном уравнении все используемые отсчеты расположены по одну сторону от результирующего выходного отсчета.

Однородные КИХ-фильтры

Однородные КИХ-фильтры часто называют **фильтрами скользящего среднего**, потому что они основаны на усреднении некоторого множества отсчетов входного сигнала, что описывается следующим разностным уравнением:

$$y[i] = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} x[i+j],$$

где $x[]$ – входной сигнал, $y[]$ – выходной сигнал, M – число усредняемых отсчетов. В данном уравнении все используемые отсчеты расположены по одну сторону от результирующего выходного отсчета.

Возможен другой вариант построения однородного нерекурсивного фильтра, при котором выбирается равное число отсчетов входного сигнала по обе стороны текущего выходного отсчета:

$$y[i] = \frac{1}{M} \sum_{j=-(M-1)/2}^{(M-1)/2} x[i+j].$$

В этом случае M должно быть нечетным числом.

Импульсная характеристика однородного нерекурсивного цифрового фильтра самая простая, например, для фильтра 5-го порядка она будет иметь вид: $h = \{..., 0, 0, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 0, 0, ...\}$. То есть в основе однородных нерекурсивных фильтров лежит алгоритм свертки входного сигнала с прямоугольным импульсом единичной площади.

Оконные фильтры

Оконные фильтры используются для решения задач частотной селекции сигналов. Они обладают высокой устойчивостью, стабильностью характеристик и оказываются чрезвычайно эффективны для частотной функции. Высокая эффективность в частотной области сопровождается ухудшением временных характеристик (увеличиваются перерегулирование и колебательность переходного процесса).

В основе работы оконных фильтров лежит операция свертки. Поэтому их программная реализация проста, но они требовательны к вычислительным затратам. Для уменьшения вычислительной сложности используют БПФ.

Основная идея построения оконных фильтров: идеальный ФНЧ должен иметь единичный коэффициент передачи во всем диапазоне частот ниже частоты среза f_c и полностью подавлять все остальные частотные компоненты.

Импульсная характеристика идеального ФНЧ:
$$h[i] = \frac{\sin(2\pi f_c i)}{\pi i}.$$

Чтобы убрать высокие частоты из сигнала нужно выполнить свертку этого сигнала с импульсной характеристикой h .

Оконные фильтры

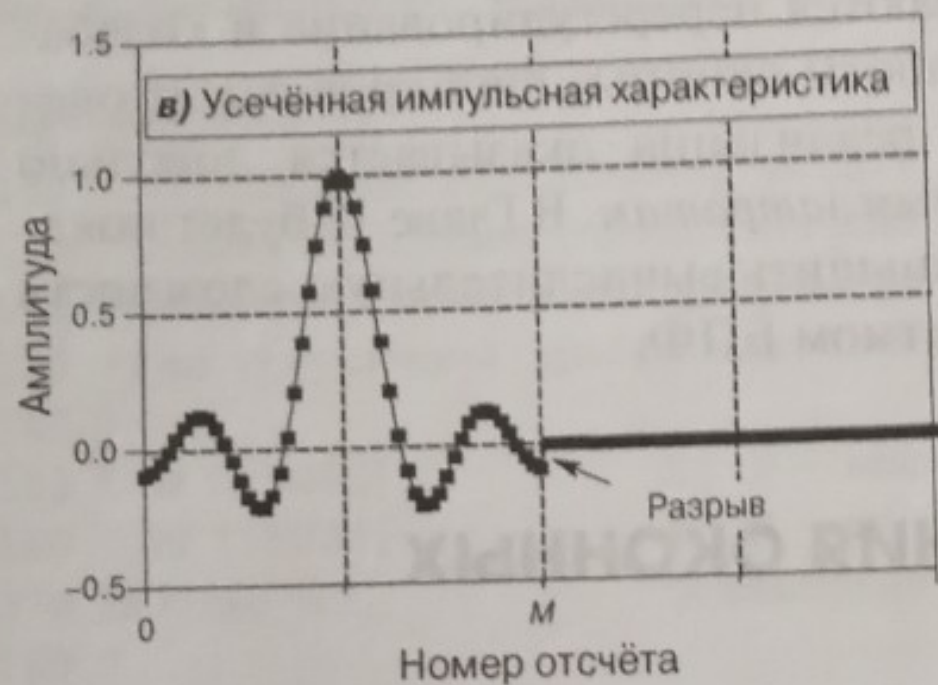
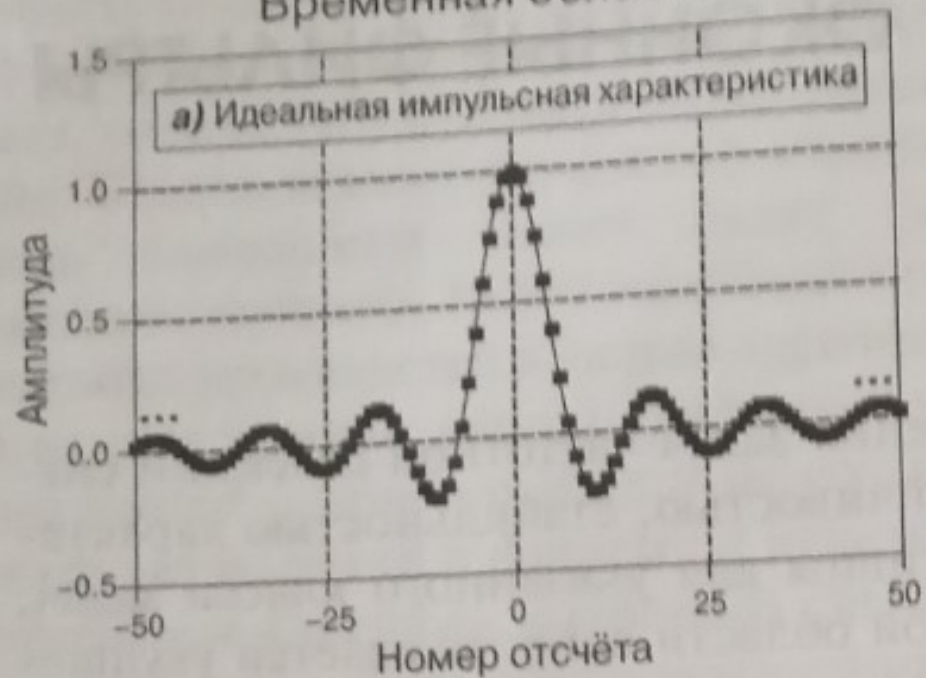
Но на практике нельзя реализовать идеальный ФНЧ, т. к. колебания функции $\sin(x)/x$ не затухают до нулевого значения. Обойти указанные трудности позволяют следующие два преобразования функции $\sin(x)/x$:

1) усечение функции до $(M+1)$ отсчетов по оси абсцисс, расположенных симметрично относительно нуля, всем остальным отсчетам присваиваются нулевые значения (т. е. они просто отбрасываются);

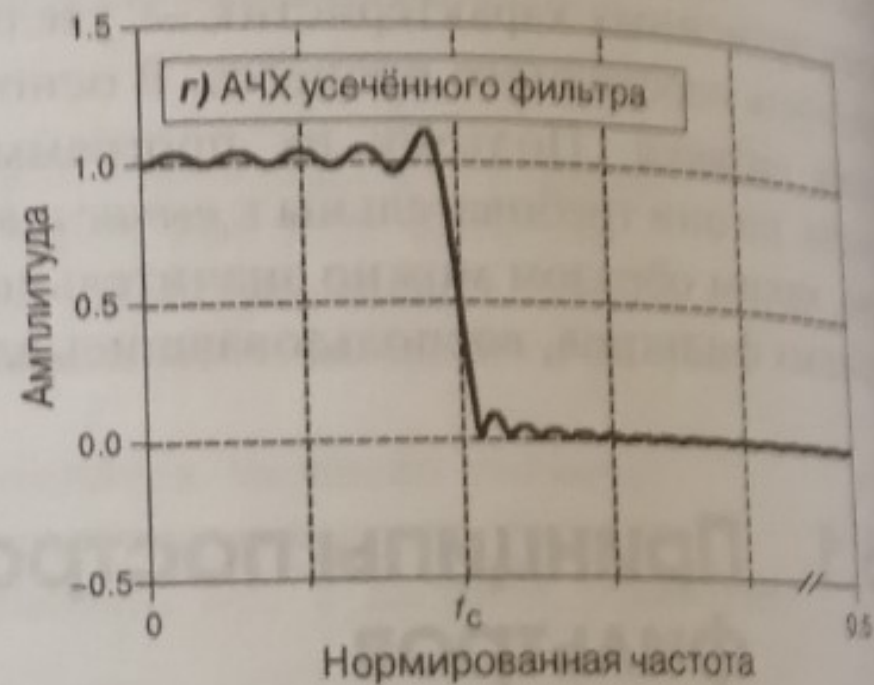
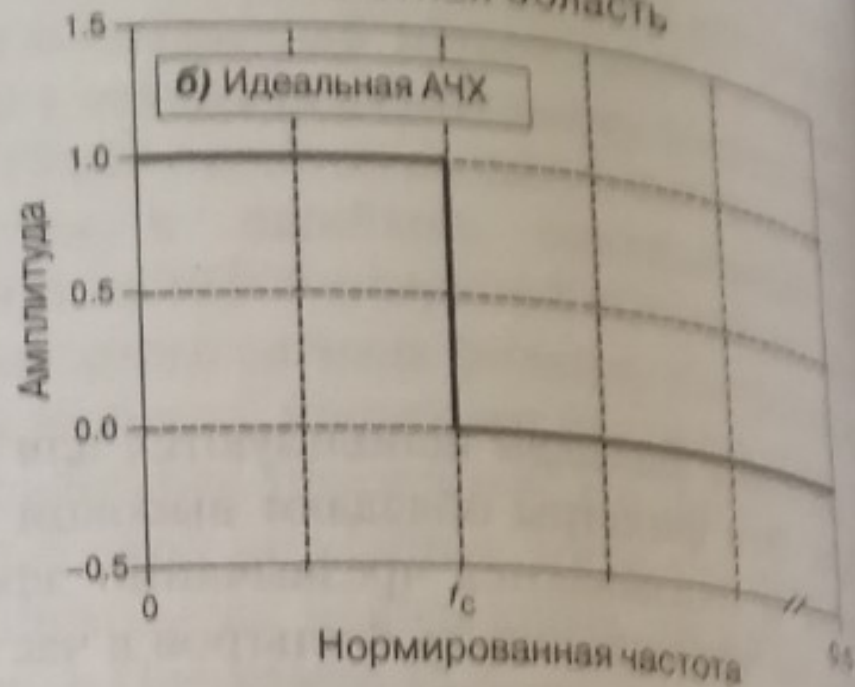
2) полученная последовательность сдвигается вправо так, чтобы номера отсчетов изменялись в пределах от 0 до M , в результате индексы весовых коэффициентов становятся неотрицательными.

Такие преобразования приводят к тому, что фильтр становится неидеальным и имеет другую АЧХ (можно найти АЧХ полученного фильтра, выполнив ДПФ его импульсной характеристики). На АЧХ появляются большие колебания в полосе пропускания фильтра, а подавление в зоне непрозрачности становится малым. Это вызвано наличием разрывов на краях усеченной импульсной характеристики. Увеличение длины импульсной характеристики не решает проблемы, т. к. не устраняет разрывов.

Временная область

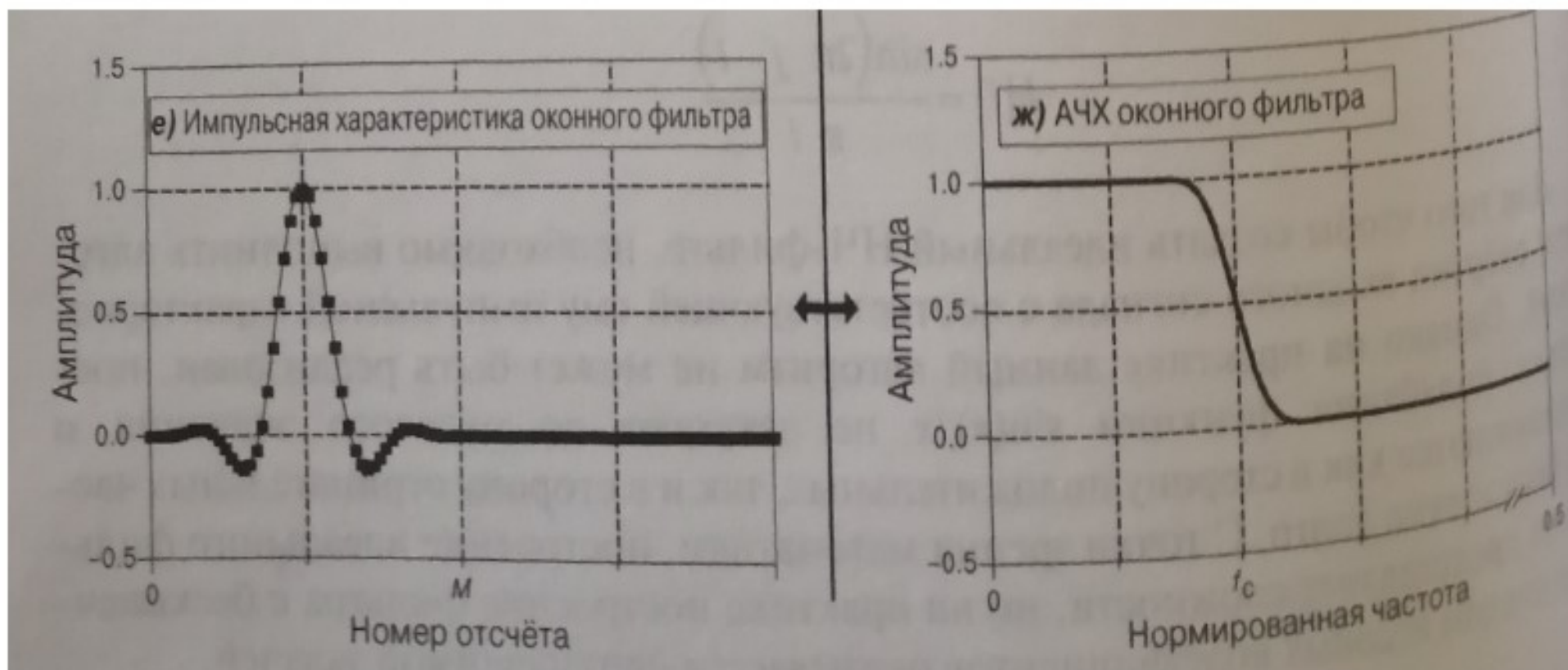


Частотная область



Оконные фильтры

Существует простой метод компенсации возникших искажений – использование оконных функций. В результате импульсная характеристика оконного фильтра представляет собой результат поэлементного умножения усеченной идеальной импульсной характеристики на оконную функцию. Главной целью использования оконной функции является сглаживание усеченной импульсной характеристики на краях. Одновременно улучшаются и частотные свойства фильтра: АЧХ в полосе пропускания становится плоской, а затухание в зоне непрозрачности значительно увеличивается.



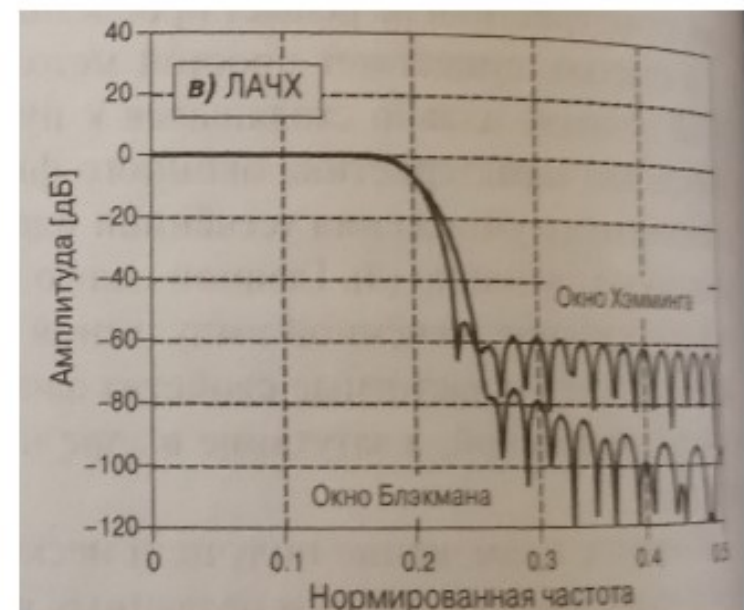
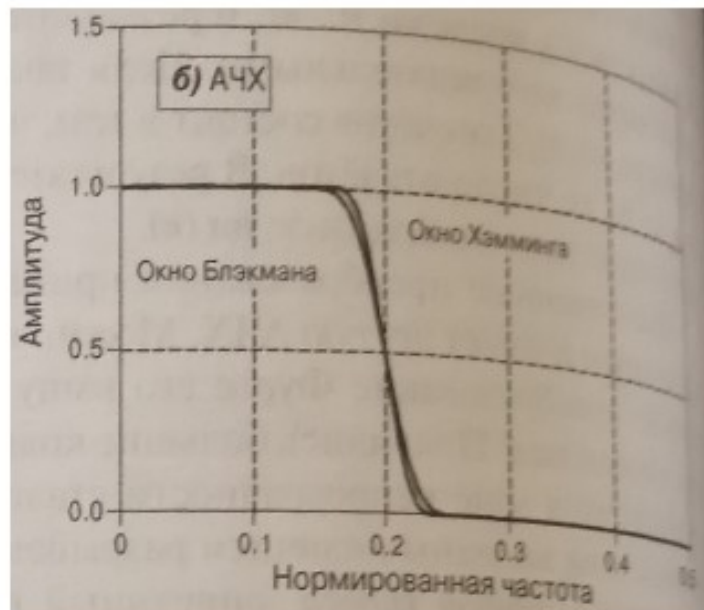
Оконные фильтры

Наиболее широкое распространение получили оконные функции Хэмминга и Блэкмана.

$$w[i] = 0,54 - 0,46 \cdot \cos\left(\frac{2\pi i}{M}\right) - \text{окно Хэмминга};$$

$$w[i] = 0,42 - 0,5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi i}{M}\right) + 0,08 \cdot \cos\left(\frac{4\pi i}{M}\right) - \text{окно Блэкмана}.$$

Предпочтительнее использовать фильтр (окно) Блэкмана, потому что медленный спад его АЧХ представляется менее серьезным недостатком, чем слабое затухание (как при использовании окна Хэмминга) в диапазоне подавляемых частот.



Оконные фильтры

Имеются и другие оконные функции, например, треугольная оконная функция Барлетта, функция приподнятого косинуса $w[i] = 0,5 - 0,5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi i}{M}\right)$ Хеннинга и другие, но все они уступают окнам Хэмминга и Блэкмана по затуханию.

Для расчета оконного фильтра нужно предварительно задать два параметра – частоту среза f_c и порядок фильтра M . Частота среза может быть задана отношением к частоте дискретизации, в этом случае она выбирается в диапазоне 0...0,5. Величину M связывает с крутизной формула: $M \approx 4/B$, где B – ширина переходной зоны фильтра, которая определяется как диапазон, разделяющий область с близким к 1 коэффициентом передачи и область с близким к 0 (границы областей соответствуют уровням 99% и 1% от максимального коэффициента усиления). Верхняя граничная частота определяется по уровню 0,5 амплитуды (а не 0,707 как для аналоговых фильтров), что дает возможность применения метода инверсии АЧХ при расчете оконных фильтров. Весовые коэффициенты КИХ-фильтра совпадают с отсчетами его импульсной характеристики (первый отсчет импульсной характеристики размещается в нулевой ячейке).

Оконные фильтры позволяют достигать невероятной точности в частотной области, но для обработки информации во временной области они непригодны. Серьезный недостаток оконных фильтров связан с высокой вычислительной сложностью их реализации, т. к. в их основе лежит трудоемкая операция свертки. Значительно сократить вычислительные затраты позволяет использование алгоритма быстрой свертки.

Альтернативу оконным фильтрам представляют рекурсивные фильтры.

Рекурсивные фильтры (БИХ-фильтры)

Рекурсивные фильтры, в отличие от нерекурсивных, не используют операцию свертки временных последовательностей, требующую значительных вычислительных затрат. Поэтому их применение повышает вычислительную эффективность алгоритмов фильтрации, но при этом могут возникать значительные ограничения по реально достижимой точности воспроизведения желаемых частотных характеристик. Рекурсивные фильтры относятся к классу цепей с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ).

Разностное уравнение рекурсивного фильтра имеет вид:

$$y[n] = -a_1 \cdot y[n-1] - a_2 \cdot y[n-2] - \dots + b_0 \cdot x[n] + b_1 \cdot x[n-1] + b_2 \cdot x[n-2] + \dots,$$

где $x[]$ – входной сигнал, $y[]$ – выходной сигнал, a_i и b_i – весовые коэффициенты.

Порядок рекурсивных фильтров, как правило, не превышает 12, что связано с проблемой устойчивости (на выходе фильтра может возникнуть неконтролируемый рост сигнала или свободные колебания).

Главное преимущество рекурсивных фильтров заключается в том, что при их реализации удастся избежать использования операции свертки, требующей большого количества арифметических операций. Взаимосвязь между импульсной характеристикой фильтра и его весовыми коэффициентами определяется при помощи Z-преобразования.

Рекурсивные фильтры (БИХ-фильтры)

Весовые коэффициенты a_i и b_i могут быть выражены через следующие три параметра:

- 1) постоянную времени τ ;

- 2) частоту среза f_c ;

- 3) относительное затухание $\chi = e^{-1/\tau}$.

Чтобы получить частотную характеристику рекурсивного фильтра, сначала находят его импульсную характеристику как реакцию на единичное импульсное воздействие. Затем применяют БПФ, чтобы перейти от импульсной характеристики к частотной. Теоретически импульсная характеристика рекурсивного фильтра имеет бесконечную длину, но в реальности через интервал, в 15-20 раз превышающий постоянную времени, она затухает ниже уровня шумов окружения. Например, для $\tau = 6,63$ отсчета в импульсной характеристике значащими остаются только около 128 отсчетов.

Особенность однополюсных рекурсивных фильтров заключается в слабых возможностях разделения частотных диапазонов, эти фильтры отлично проявляют себя при обработке сигналов во временной области. Некоторого улучшения частотных характеристик можно достичь путем использования последовательного (каскадного) соединения нескольких однополюсных фильтров. Здесь возможны два способа улучшения частотных характеристик:

- 1) сигнал можно пропускать через один и тот же фильтр несколько раз (так проще);

- 2) воспользовавшись Z-преобразованием, можно найти весовые коэффициенты цифрового рекурсивного фильтра, эквивалентного по своим свойствам последовательному соединению нескольких звеньев.

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Передаточная функция дискретного фильтра

$$y(k) = - \sum_{m=1}^M a_m y(k-m) + \sum_{m=0}^N b_m x(k-m), \quad Y(z) = - Y(z) \sum_{m=1}^M a_m z^{-m} + X(z) \sum_{m=0}^N b_m z^{-m}.$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^N b_m z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^M a_m z^{-m}}.$$

Передаточная функция фильтра имеет вид:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}}$$

где порядок фильтра — большее N или M . В данном случае это формула БИХ-фильтра. Если знаменатель равен единице, то получаем формулу КИХ-фильтра (без обратной связи).

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Передаточная функция фильтра имеет вид:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}} \quad (10)$$

где порядок фильтра — большее N или M . В данном случае это формула БИХ-фильтра. Если знаменатель равен единице, то получаем формулу КИХ-фильтра (без обратной связи).

КИХ-фильтр (с конечной импульсной характеристикой, нерекурсивный фильтр) — один из видов электронных фильтров, характерной особенностью которого является ограниченность по времени его импульсной характеристики (с какого-то момента времени она становится точно равной нулю). Знаменатель передаточной функции такого фильтра — некая константа.

БИХ-фильтр (с бесконечной импульсной характеристикой, рекурсивный фильтр) — электронный фильтр, использующий один или более своих выходов в качестве входа, то есть образует обратную связь. Основным свойством таких фильтров является то, что их импульсная переходная характеристика имеет бесконечную длину во временной области, а передаточная функция имеет дробно-рациональный вид. Такие фильтры могут быть как аналоговыми, так и цифровыми.

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Цифровой фильтр называется *рекурсивным*, если в его структуре есть хотя бы одна обратная связь. Обратным связям соответствуют не равные нулю коэффициенты a_i , $i = 1, 2, \dots, M$, в разностном уравнении (10). Если все коэффициенты $a_i = 0$, то фильтр называется *нерекурсивным*.

Зная импульсную характеристику, можно оценить устойчивость цифрового фильтра. Если сумма модулей отсчетов импульсной характеристики стремится к бесконечности, то цифровой фильтр будет неустойчивым. Если эта сумма конечна, то фильтр устойчив. Например, легко заметить, что импульсная характеристика нерекурсивного фильтра конечна и поэтому этот фильтр всегда устойчив. Для цифровой обработки сигналов необходимо использовать устойчивые цифровые фильтры.

Фильтр называется *устойчивым*, если при любых конечных начальных условиях и любом ограниченном входном сигнале выходной сигнал также остается ограниченным. Необходимым и достаточным условием устойчивости фильтра является требование, чтобы модули полюсов его передаточной характеристики $H(z)$ были меньше 1.

Например, при

$$H(z) = \frac{z+1}{(z+0,5)(z-0,4)}$$

фильтр будет устойчивым, т. к. он имеет два полюса, $z = -0,5$ и $z = 0,4$, по модулю меньшие единицы. Очевидно, что нерекурсивный фильтр всегда устойчив.

Неустойчивый фильтр неработоспособен в том случае, когда входной сигнал действует неограниченно долго, т. к. в конце концов, выходной сигнал перестанет зависеть от входного. Однако он работоспособен и используется в тех случаях, когда входной сигнал действует в течение ограниченного интервала времени. Примером такого фильтра является цифровой накопитель, которому соответствует разностное уравнение

$$y(k) = x(k) + y(k-1).$$

В терминах z -преобразования оно имеет вид $Y(z) = X(z) + z^{-1}Y(z)$.

Передаточная функция цифрового интегратора

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

имеет полюс в точке $z=1$, фильтр неустойчивый. Однако цифровой накопитель работоспособен и используется в тех случаях, когда входной сигнал действует в течение ограниченного интервала времени, например, когда $0 \leq k \leq N-1$, после чего следует сброс, т. е. восстанавливаются нулевые начальные условия.

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Передаточная функция фильтра имеет вид:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}}$$

где порядок фильтра — большее N или M . В данном случае это формула БИХ-фильтра. Если знаменатель равен единице, то получаем формулу КИХ-фильтра (без обратной связи).

Пример По заданным входной $x(n) = \{1, 0, 1, 2, 0, 0, 0, \dots\}$
и выходной $y(n) = \{0, 1, 2, 3, 0, 0, 0, \dots\}$
последовательностям найти передаточную функцию фильтра.

$$H(z) = \frac{Z\{y(n)\}}{Z\{x(n)\}} = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{1 + \sum_{m=1}^M a_m z^{-m}} = \frac{z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3}}{1 + z^{-2} + 2z^{-3}} = \frac{z^2 + 2z + 3}{z^3 + z + 2}.$$

Пример Найти передаточную функцию для рекурсивного фильтра, описываемого разностным уравнением $y(n) = ay(n-1) + x(n)$.

$$H(z) = \frac{1}{1 + (-az^{-1})} = \frac{z}{z - a}.$$

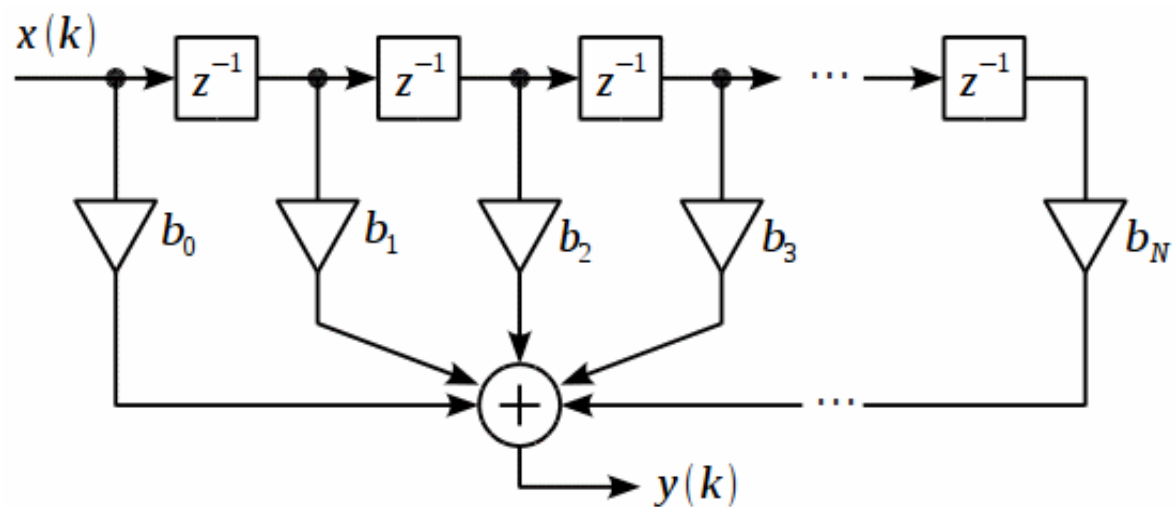


Рис. Структурная схема нерекурсивного КИХ-фильтра

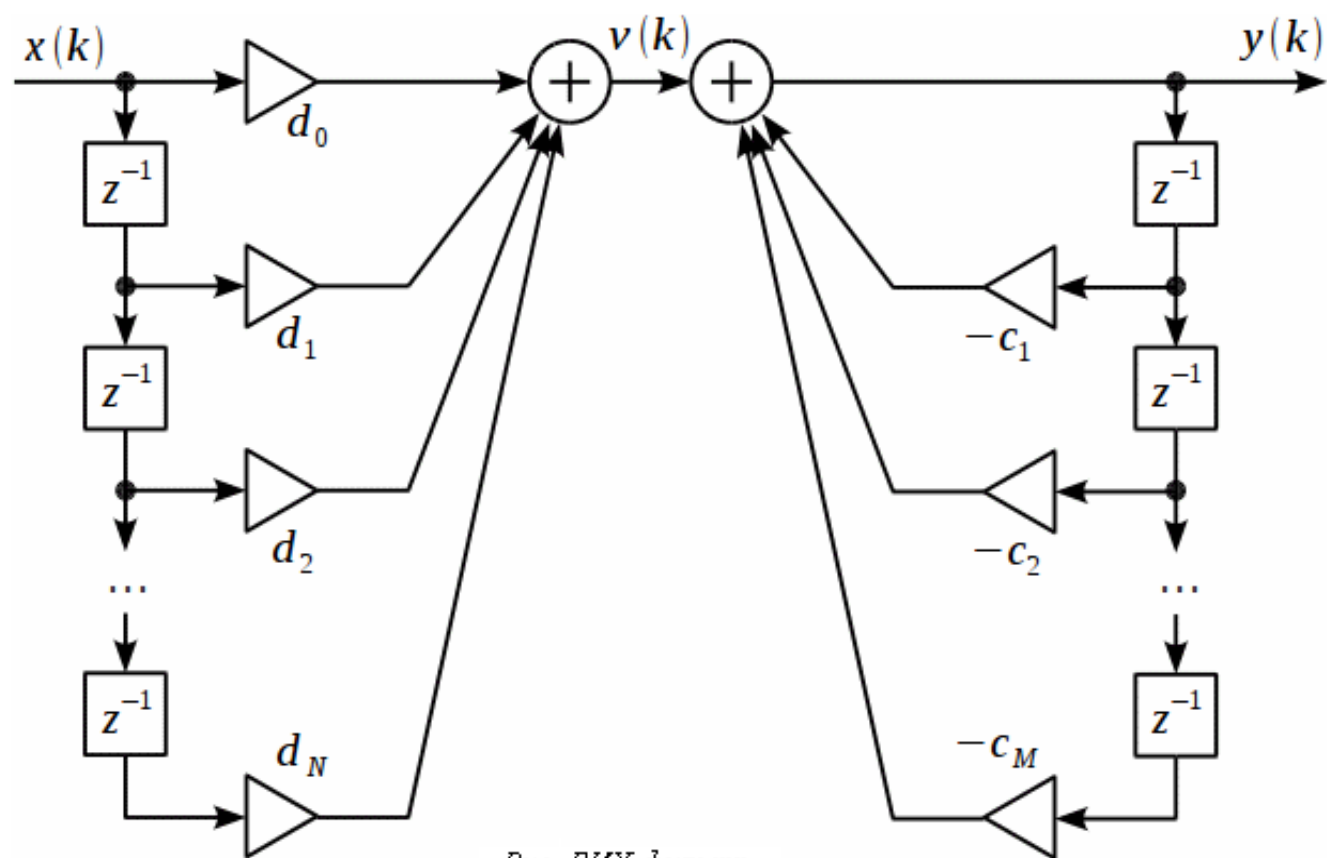


Рис. БИХ-фильтр

Импульсная и частотная характеристики дискретного фильтра

Условие устойчивости (необходимое и достаточное) заключается в том, что импульсная характеристика $h(k)$ является абсолютно суммируемой, т. е.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| < \infty.$$

Если $x(k)$ ограничено по величине, т. е. $|x(k)| \leq X_{\max} < \infty$, то такое входное воздействие порождает ограниченный выходной сигнал.

В неустойчивой системе при некоторых ограниченных входных сигналах выходной сигнал неограниченно возрастает.

Необходимое условие устойчивости ЛДФ: $\lim_{n \rightarrow \infty} h(n) = 0$.

КИХ-фильтры всегда устойчивы.

Пример Определить по передаточной функции $H(z) = \frac{z}{z-a}$,

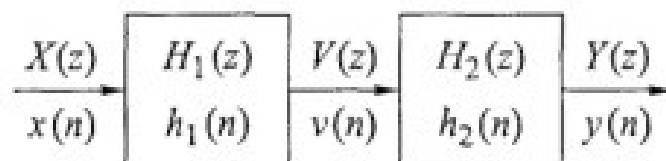
при каких значениях параметра a фильтр, описываемый разностным уравнением $y(n) = ay(n-1) + x(n)$, является устойчивым.

Единственная особая точка передаточной функции — полюс первого порядка $z = a$.

Таким образом, $|a| < 1$.

Соединения и структурные схемы фильтров

1. Последовательное соединение фильтров

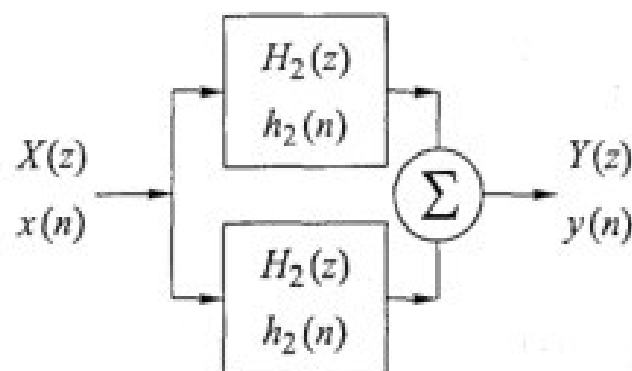


$$Y(z) = H_2(z)V(z) = H_2(z)H_1(z)X(z),$$

Отсюда передаточная функция:

$$H(z) = H_2(z)H_1(z).$$

2. Параллельное соединение фильтров

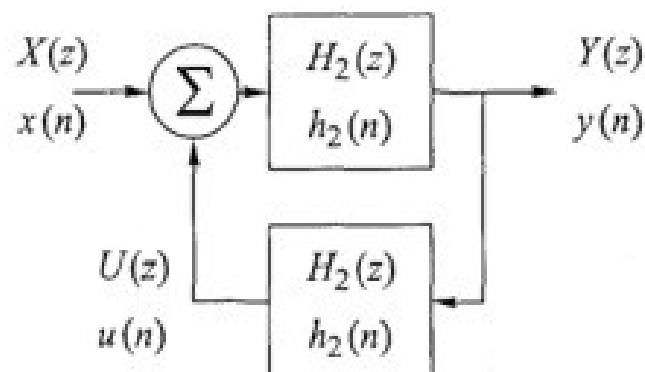


$$Y(z) = H_1(z)X(z) + H_2(z)X(z).$$

Отсюда передаточная функция:

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z).$$

3. Соединение с обратной связью



$$\begin{aligned} Y(z) &= H_1(z)(X(z) + U(z)) = \\ &= H_1(z)(X(z) + H_2(z)Y(z)). \end{aligned}$$

Отсюда

$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 - H_1(z)H_2(z)}.$$

Преимуществами цифровых фильтров перед аналоговыми являются:

- Высокая точность (точность аналоговых фильтров ограничена допусками на элементы).
- Стабильность (в отличие от аналогового фильтра передаточная функция не зависит от дрейфа характеристик элементов).
- Гибкость настройки, лёгкость изменения.
- Компактность — аналоговый фильтр на очень низкую частоту (доли герца, например) потребовал бы чрезвычайно громоздких конденсаторов или индуктивностей.

Недостатками цифровых фильтров по сравнению с аналоговыми являются:

- Трудность работы с высокочастотными сигналами. Полоса частот ограничена частотой Найквиста, равной половине частоты дискретизации сигнала. Поэтому для высокочастотных сигналов применяют аналоговые фильтры, либо, если на высоких частотах нет полезного сигнала, сначала подавляют высокочастотные составляющие с помощью аналогового фильтра, затем обрабатывают сигнал цифровым фильтром.
- Трудность работы в реальном времени — вычисления должны быть завершены в течение периода дискретизации.
- Для большой точности и высокой скорости обработки сигналов требуется не только мощный процессор, но и дополнительное, возможно дорогостоящее, аппаратное обеспечение в виде высокоточных и быстрых ЦАП и АЦП.

ВИДЫ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

Различают два вида реализации цифрового фильтра: аппаратный и программный. Аппаратные цифровые фильтры реализуются на элементах интегральных схем, тогда как программные реализуются с помощью программ, выполняемых программируемой интегральной логической схемой, процессором или микроконтроллером. Преимуществом программных перед аппаратным является лёгкость воплощения, а также настройки и изменений, а также то, что в себестоимость такого фильтра входит только труд программиста. Недостаток — низкая скорость, зависящая от быстродействия процессора, а также трудная реализуемость цифровых фильтров высокого порядка.

Цифровые фильтры на сегодняшний день применяются практически везде, где требуется обработка сигналов, в частности в спектральном анализе, обработке изображений, обработке видео, обработке речи и звука и многих других приложениях.

Цифровые фильтры используют в системах управления различными объектами и процессами, где алгоритмы обработки могут быть настолько сложными, что аналоговыми устройствами реализованы быть не могут. Другая важная область применения цифровых фильтров – это обработка низко- и инфранизкочастотных сигналов, когда использование аналоговых устройств затруднено из-за больших габаритных размеров катушек индуктивностей и конденсаторов. Области применения цифровых фильтров будут непрерывно расширяться в связи с появлением и широким распространением микропроцессоров, специализированных БИС и т.п., уменьшением их стоимости и повышением быстродействия.

На железнодорожном транспорте цифровые методы обработки сигналов, и в частности цифровые фильтры, смогут найти применение в перспективных системах связи, например в устройствах сопряжения систем передачи с частотным и временным разделением каналов (трансмультимплексорах), во вновь разрабатываемых устройствах железнодорожной автоматики.

ЦИФРОВАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

