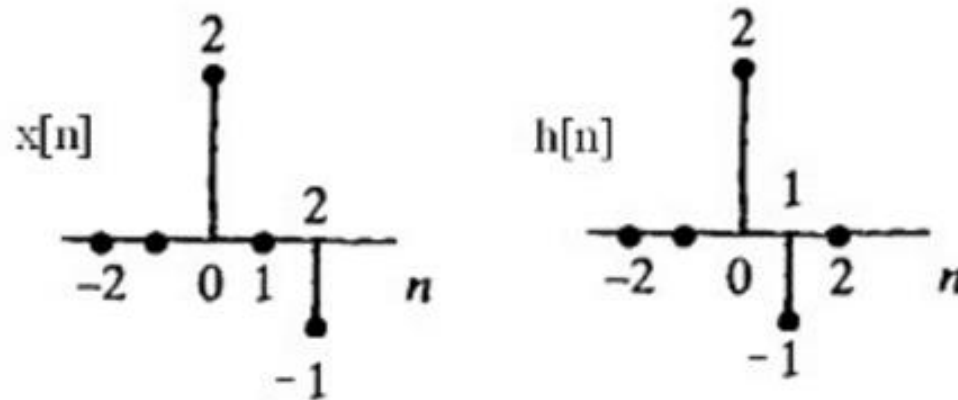


ВЫПОЛНЕНИЕ ОПЕРАЦИИ СВЕРТКИ

Задание 1.

Рассчитайте отсчеты выходного сигнала $y[n]$, полученного сверткой отсчетов входного сигнала $x[n]$ и импульсной характеристики $h[n]$.

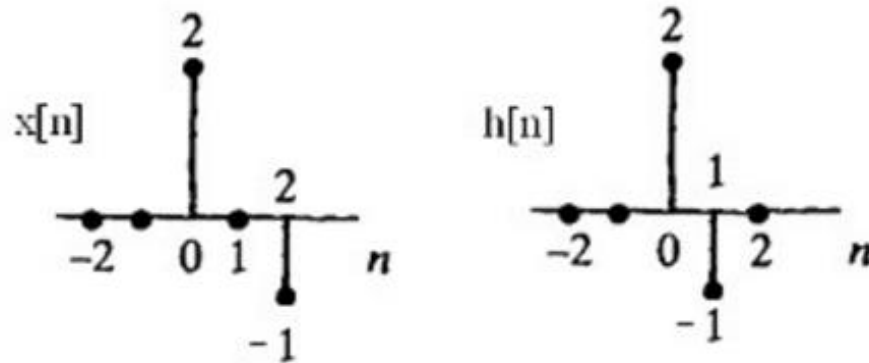


$y[n]$ — ?

ВЫПОЛНЕНИЕ ОПЕРАЦИИ СВЕРТКИ

Задание 1.

Рассчитайте отсчеты выходного сигнала $y[n]$, полученного сверткой отсчетов входного сигнала $x[n]$ и импульсной характеристики $h[n]$.



$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]. \quad (*)$$

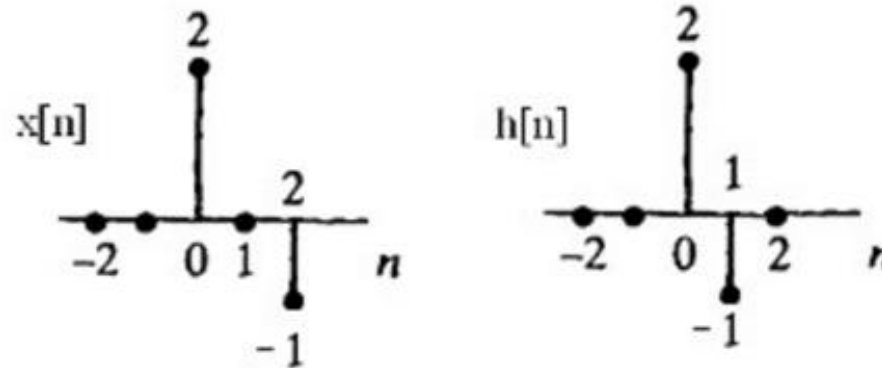
Операция дискретной свертки строит последовательность $y[n]$ по двум данным последовательностям $x[n]$ и $h[n]$. Уравнение $(*)$ выражает каждый отсчет выходной последовательности через все отсчеты входной последовательности и импульсную характеристику.

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]. \quad (**)$$

ВЫПОЛНЕНИЕ ОПЕРАЦИИ СВЕРТКИ

Задание 1.

Рассчитайте отсчеты выходного сигнала $y[n]$, полученного сверткой отсчетов входного сигнала $x[n]$ и импульсной характеристики $h[n]$.



Решение:

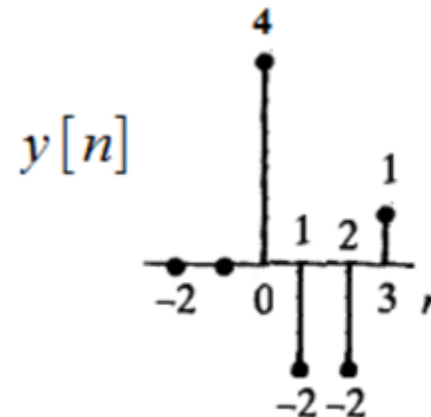
$$y[n] = \sum_k h[k] \cdot x[n-k]; \quad y[n] = h[0] \cdot x[n-0] + h[1] \cdot x[n-1] = 2 \cdot x[n] - x[n-1]; \quad \text{т. к. все остальные } h[-2]=h[-1]=h[2]=0;$$
 ненулевые значения $y[n]$ будут лежать в диапазоне $[0, 3]$;

$$y[0] = 2 \cdot x[0] - x[-1] = 2 \cdot 2 - 0 = 4;$$

$$y[1] = 2 \cdot x[1] - x[0] = 2 \cdot 0 - 2 = -2;$$

$$y[2] = 2 \cdot x[2] - x[1] = 2 \cdot (-1) - 0 = -2;$$

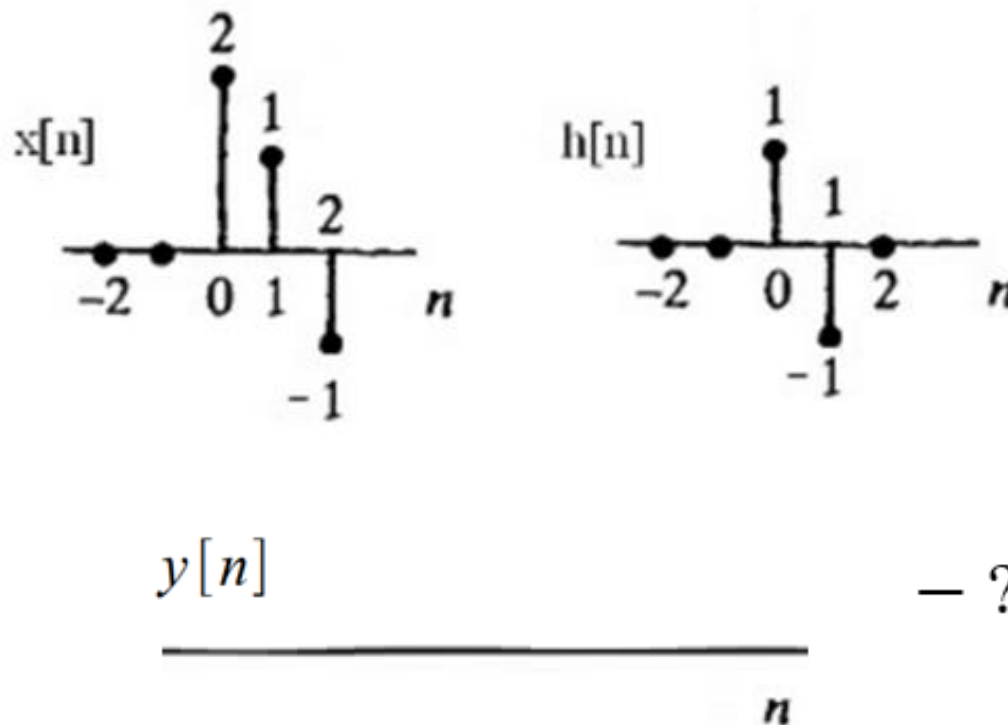
$$y[3] = 2 \cdot x[3] - x[2] = 2 \cdot 0 - (-1) = 1.$$



ВЫПОЛНЕНИЕ ОПЕРАЦИИ СВЕРТКИ

Задание 2.

Рассчитайте отсчеты выходного сигнала $y[n]$, полученного сверткой отсчетов входного сигнала $x[n]$ и импульсной характеристики $h[n]$.



ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

И в первом, и во втором случаях можно выделить три базовых элемента, с использованием которых строится цифровой фильтр: элемент памяти (задержки), умножитель и сумматор. Условные обозначения этих элементов приведены на рис. 1, а, б, в, соответственно. В зависимости от реализации ЦФ под элементом понимается или специализированная микросхема, или оператор в программе. Для простоты шумами квантования в этих элементах в дальнейшем будем пренебрегать. Вместо цифровых сигналов в этом случае можно использовать дискретные сигналы.

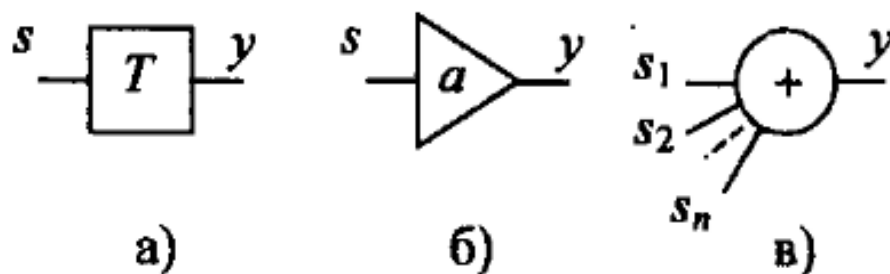


Рис. 1

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Дискретный сигнал $y(kt_D)$ на выходе цифрового элемента памяти (задержки) равен задержанному на один такт входному сигналу:

$$y(kt_D) = s(kt_D - t_D), \quad (1)$$

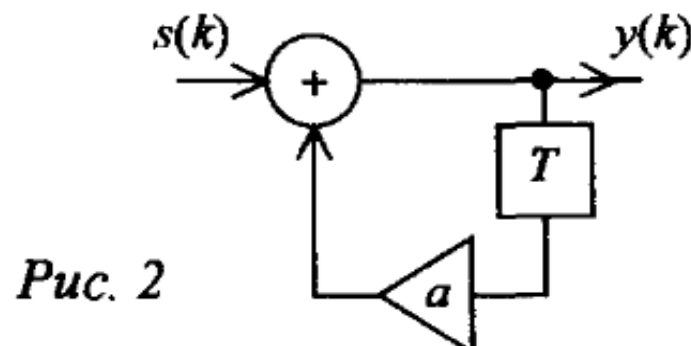
где номер отсчета $k = 0, 1, 2, \dots$; t_D — период дискретизации. В умножителе уровень входного сигнала изменяется в a раз:

$$y(kt_D) = a s(kt_D). \quad (2)$$

Сумматор осуществляет суммирование нескольких входных сигналов:

$$y(kt_D) = s_1(kt_D) + s_2(kt_D) + \dots + s_n(kt_D). \quad (3)$$

На рис. 2 в качестве примера приведена схема цифрового фильтра низких частот первого порядка. Порядок цифрового фильтра определяется числом элементов памяти.



ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА И Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Прямое дискретное преобразование Лапласа

Кратко дискретное преобразование Лапласа (или D-преобразование) записывается следующим образом:

$$F^*(p) = L[f^*(t)] = D[f[nT]] = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT] e^{-pnT}. \quad (4)$$

По сравнению с обычным преобразованием Лапласа для непрерывных оригиналов, интеграл заменен на сумму, а непрерывная переменная t на дискретную nT .

Пример 1.

Определить дискретное преобразование Лапласа для единичной функции $f(t) = 1(t)$.

Решение: Применив формулу дискретного преобразования Лапласа, получим:

$$F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT] e^{-pnT} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-pnT} = \frac{1}{1 - e^{-pT}}.$$

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА И Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Прямое дискретное преобразование Лапласа

Если изображения непрерывных сигналов являются степенными уравнениями - $f(p^n)$, то изображения дискретных функций являются показательными уравнениями - $f(e^{pnT})$, следовательно, к ним нельзя применять аппарат теории непрерывных систем.

Если ввести новую переменную $z = e^{pT}$, тогда вместо (4) будем иметь:

$$F(z) = F^*\left(p = \frac{1}{T} \ln z\right) = Z[f[nT]] = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n}, \quad (5)$$

где для сокращения записи введено $f[n] = f[nT]$.

Это выражение представляет собой **Z-преобразование**, которое широко используется в литературе импульсных систем. Основное его преимущество — компактная форма записи. При использовании Z-преобразования получаем степенные уравнения, что позволяет применять методы исследования непрерывных систем для дискретных систем.

Дискретное преобразование Лапласа (**D-преобразование**) более удобно для проведения аналогии между свойствами непрерывных и импульсных систем, так как в том и другом случае изображения решетчатой являются функцией комплексной переменной.

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Цифровой фильтр — это цифровое устройство или способ обработки цифровых сигналов на ЭВМ, с помощью которых осуществляется выделение полезных сигналов в определенном диапазоне частот. Цифровой фильтр выполняет такую же задачу, как и аналоговый фильтр, выполненный на катушках, конденсаторах и резисторах.

Различают цифровые фильтры, реализованные в виде специализированной ЭВМ, включающей набор специализированных микросхем, и цифровые фильтры, реализованные в виде программы для универсальной ЭВМ. Специализированные ЭВМ, как правило, содержат запоминающие устройства и несколько арифметико-логических блоков сложения и умножения. Универсальные ЭВМ, напротив, как правило, строятся на одном быстродействующем процессоре.

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Передаточная функция дискретного фильтра

$$y(k) = - \sum_{m=1}^M a_m y(k-m) + \sum_{m=0}^N b_m x(k-m), \quad Y(z) = - Y(z) \sum_{m=1}^M a_m z^{-m} + X(z) \sum_{m=0}^N b_m z^{-m}.$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^N b_m z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^M a_m z^{-m}}.$$

Передаточная функция фильтра имеет вид:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}}$$

где порядок фильтра — большее N или M . В данном случае это формула БИХ-фильтра. Если знаменатель равен единице, то получаем формулу КИХ-фильтра (без обратной связи).

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Передаточная функция фильтра имеет вид:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}} \quad (10)$$

где порядок фильтра — большее N или M . В данном случае это формула БИХ-фильтра. Если знаменатель равен единице, то получаем формулу КИХ-фильтра (без обратной связи).

КИХ-фильтр (с конечной импульсной характеристикой, нерекурсивный фильтр) — один из видов электронных фильтров, характерной особенностью которого является ограниченность по времени его импульсной характеристики (с какого-то момента времени она становится точно равной нулю). Знаменатель передаточной функции такого фильтра — некая константа.

БИХ-фильтр (с бесконечной импульсной характеристикой, рекурсивный фильтр) — электронный фильтр, использующий один или более своих выходов в качестве входа, то есть образует обратную связь. Основным свойством таких фильтров является то, что их импульсная переходная характеристика имеет бесконечную длину во временной области, а передаточная функция имеет дробно-рациональный вид. Такие фильтры могут быть как аналоговыми, так и цифровыми.

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Задание 3.

По заданным входной $x(n) = \{0, 1, 2, 3, 0, 0, \dots\}$

и выходной $y(n) = \{1, 0, 1, 2, 0, 0, 0, \dots\}$

последовательностям найти передаточную функцию фильтра.

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Задание 3.

По заданным входной $x(n) = \{0, 1, 2, 3, 0, 0, \dots\}$

и выходной $y(n) = \{1, 0, 1, 2, 0, 0, 0, \dots\}$

последовательностям найти передаточную функцию фильтра.

Решение:

$$H(z) = \frac{Z\{y(n)\}}{Z\{x(n)\}} = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{1 + \sum_{m=1}^M a_m z^{-m}};$$

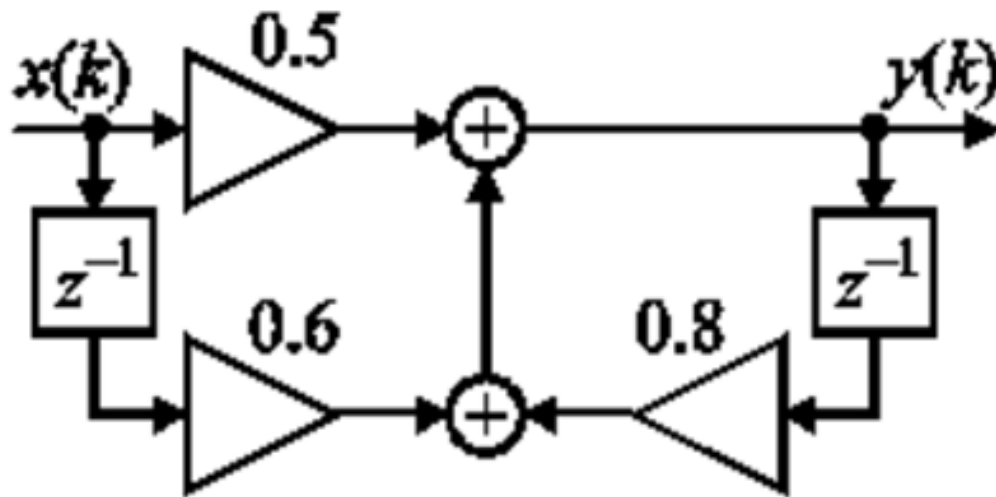
$$H(z) = \frac{z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3}}{1 + z^{-2} + 2z^{-3}} = \frac{z^2 + 2z + 3}{z^3 + z + 2}.$$

(числитель и знаменатель умножили на z^3)

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Задание 4.

Структурная схема дискретной системы показана на рисунке.

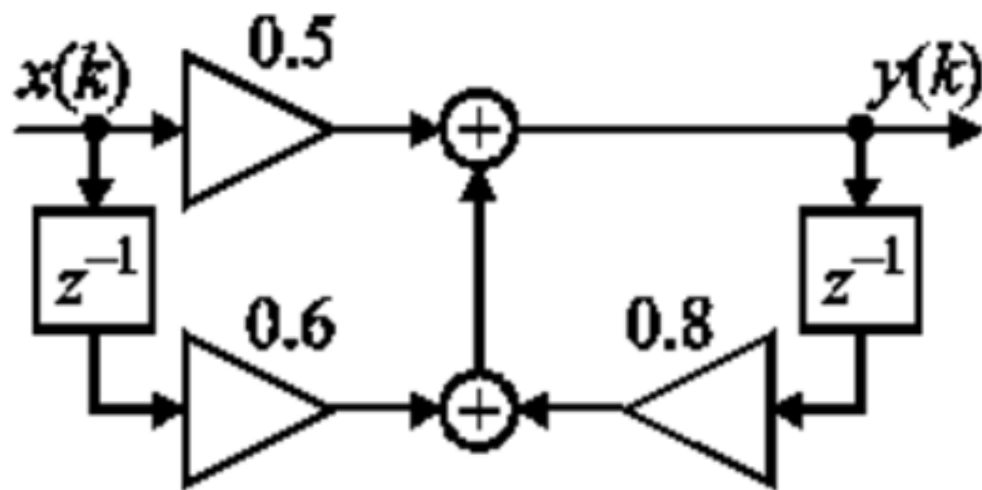


Чему равна функция передачи этой системы?

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Задание 4.

Структурная схема дискретной системы показана на рисунке.



Чему равна функция передачи этой системы?

Решение:

$$H(z) = \frac{0.5 + 0.6z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}} = \frac{0.5z + 0.6}{z - 0.8}.$$

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Задание 5.

По передаточной функции $H(z) = \frac{0.5z + 0.6}{z - 0.8}$

нарисовать структурную схему фильтра.

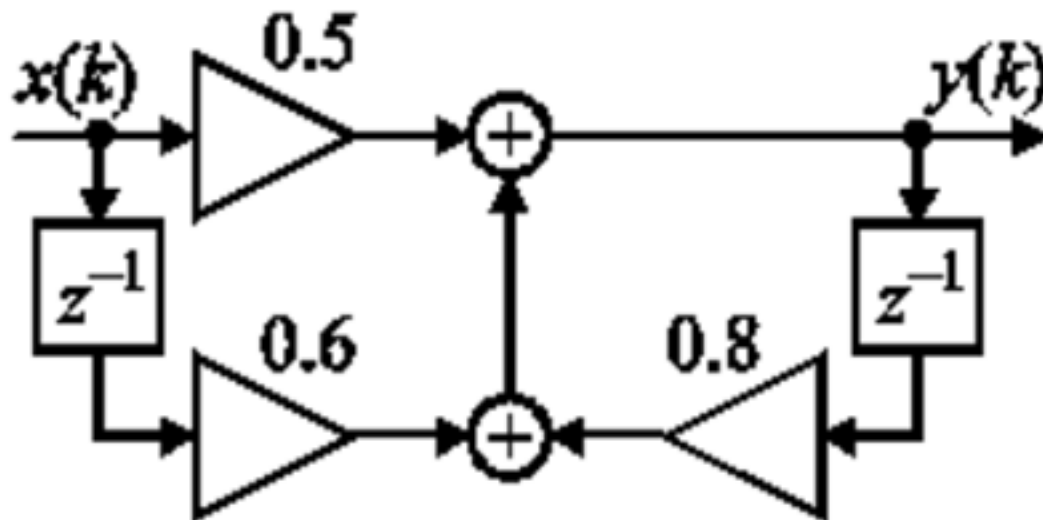
ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Задание 5.

По передаточной функции $H(z) = \frac{0.5z + 0.6}{z - 0.8}$ нарисовать структурную схему фильтра.

Решение:

$$H(z) = \frac{0.5z + 0.6}{z - 0.8} = \frac{0.5 + 0.6z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}.$$



ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Задание 6.

По передаточной функции

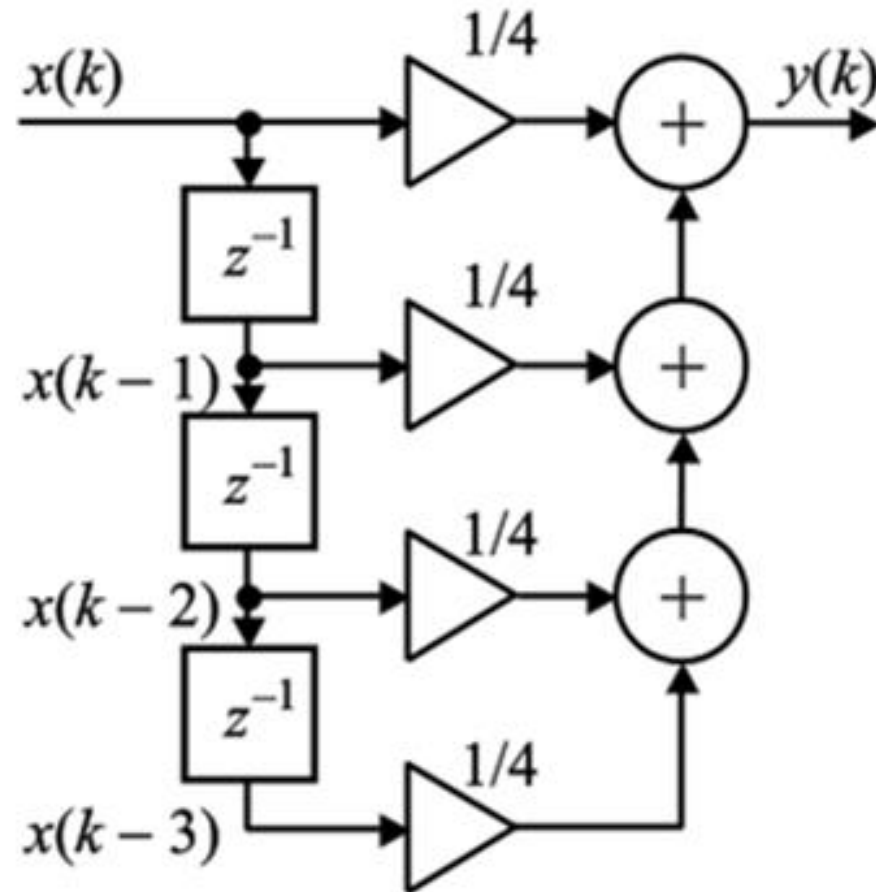
$$H(z) = \frac{z^2 + 0.6z + 0.1}{z^2 - 0.8z - 0.3}$$

нарисовать структурную схему фильтра.

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Задание 7.

Структурная схема дискретной системы показана на рисунке.



Чему равна функция передачи этой системы?

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Задание 8.

По заданным входной $x(n) = \{0, 1, 0, 5, 1, 0, \dots\}$

и выходной $y(n) = \{1, 0, 1, 0, 4, 0, 0, \dots\}$

последовательностям найти передаточную функцию фильтра.