

Литература:

1. Атабеков Г.И. Теоретические основы электротехники.
Ч.1. Линейные электрические цепи. – М.: Энергия, 2008.
2. Иванов И.И., Лукин А.Ф., Соловьев Г.И.
Электротехника. – С-Пб.: Лань, 2003.
3. Иванов И.И., Соловьев Г.И., Равдоник В.С.
Электротехника. – С-Пб.: Лань, 2008.
4. Прянишников В.А., Петров Е.А., Осипов Ю.М.
Электротехника и ТООЭ в примерах и задачах. – С-Пб.:
КОРОНА принт, 2008.
5. Вахний Т.В. Сборник задач по электротехнике. –
Омск: Изд-во ОмГУ, 2015.

6. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. – М.: Высшая школа, 1999.
7. Данилов И.А., Иванов П.М. Общая электротехника с основами электроники. – М.: Высшая школа, 2004.
8. Прянишников В.А. Теоретические основы электротехники. – С-Пб.: КОРОНА принт, 2000.
9. Касаткин А.С., Немцов М.В. Курс электротехники. – М.: Высшая школа, 2005.
10. Лоторейчук Е.А. Теоретические основы электротехники. – М.: ИФ “ФОРУМ” – ИНФРА-М, 2009.
11. Березкина Т.Ф., Гусев Н.Г., Масленников В.В. Задачник по общей электротехнике с основами электроники. – М.: Высшая школа, 2001.

Основные понятия и определения электрических цепей

Электротехника — это наука о практическом применении электрических и магнитных явлений. Основными вопросами, которыми занимается электротехника, являются генерирование, передача на расстояние и преобразование электрической энергии в механическую, тепловую, световую и другие формы энергии.

Для удобства анализа реальное электромагнитное устройство с происходящими в нем и в окружающем его пространстве физическими процессами в теории электрических цепей заменяют некоторым расчетным эквивалентом — электрической цепью.

Электрической цепью называется совокупность соединенных друг с другом источников электрической энергии и нагрузок, по которым может протекать электрический ток. Электромагнитные процессы в электрической цепи можно описать с помощью понятий ток, напряжение, ЭДС, сопротивление, индуктивность и емкость.

Основные понятия и определения

Электрический ток – это направленное движение электрически заряженных частиц под действием электрического поля. **Сила тока** I , $[I] = 1 \text{ A}$.

ЭДС – электродвижущая сила, вынуждающая перемещаться заряды, E , $[E] = 1 \text{ В}$.

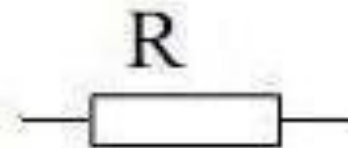
Напряжением называется разность потенциалов, существующая между двумя точками проводника, U , $[U] = 1 \text{ В}$.

Постоянным называется неизменный во времени электрический ток. Если величина силы тока изменяется во времени, то такой электрический ток называется **переменным**.

Постоянный ток обозначается буквой – I , переменный – $i(t)$, постоянная ЭДС – E , переменная ЭДС – $e(t)$, постоянное напряжение – U , переменное напряжение – $u(t)$, сопротивление – R , проводимость – G , индуктивность – L , ёмкость – C .

Изображенная с помощью условных знаков электрическая цепь называется **электрической схемой**.

Сопротивлением обладают пассивные элементы, в которых происходит преобразование электрической энергии в любой другой вид энергии. Простейшим реальным элементом, обладающим сопротивлением является резистор. Условное обозначение R , $[R]=1 \text{ Ом}$.

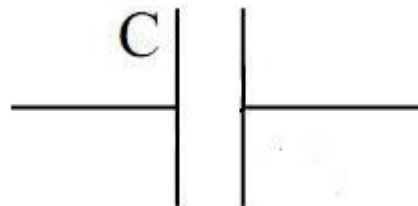


Проводимость $G = 1/R$, $[G] = 1 \text{ См}$ (Сименс)

Индуктивностью L обладают пассивные элементы электрической цепи, которые способны запасать энергию источника в магнитном поле без преобразования ее в другие виды энергий. Простейшим реальным элементом, обладающим индуктивностью является катушка индуктивности. $[L] = 1 \text{ Гн}$ (Генри).



Емкостью C обладают пассивные элементы электрической цепи, которые способны запасать энергию в электрическом поле без преобразования в другие виды энергии. Простейшим реальным элементом, обладающим емкостью является конденсатор. $[C] = 1 \text{ Ф}$ (Фарада).



Зависимость тока, протекающего по элементу электрической цепи, от напряжения на его зажимах (или наоборот) называется **вольт-амперной характеристикой (ВАХ)**.

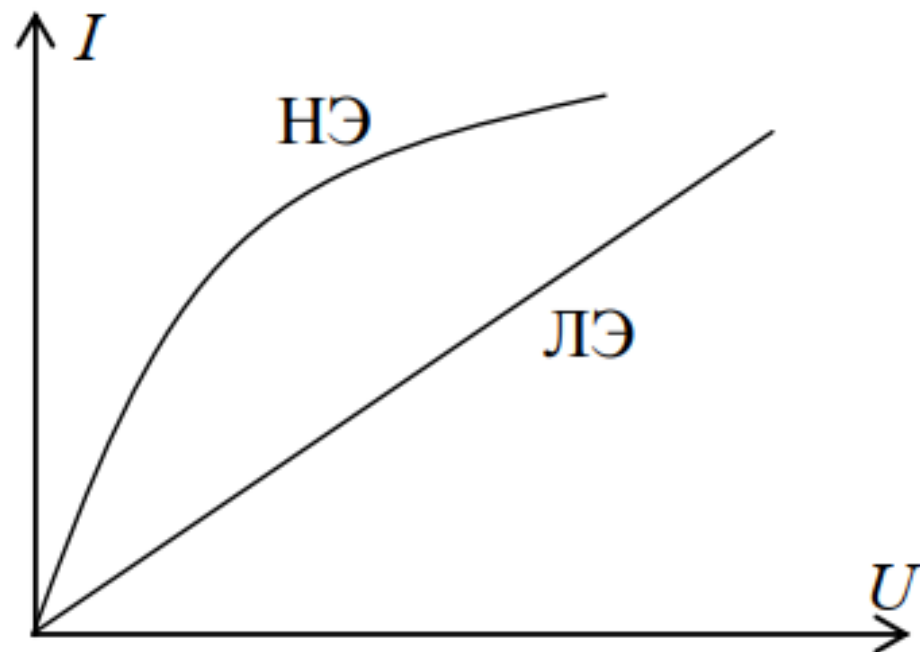
На рис. изображены ВАХ линейного (ЛЭ) и нелинейного (НЭ) элементов.

Элементы, ВАХ которых являются прямыми линиями, называются **линейными**.

Электрические цепи, имеющие только линейные элементы, называются **линейными электрическими цепями**.

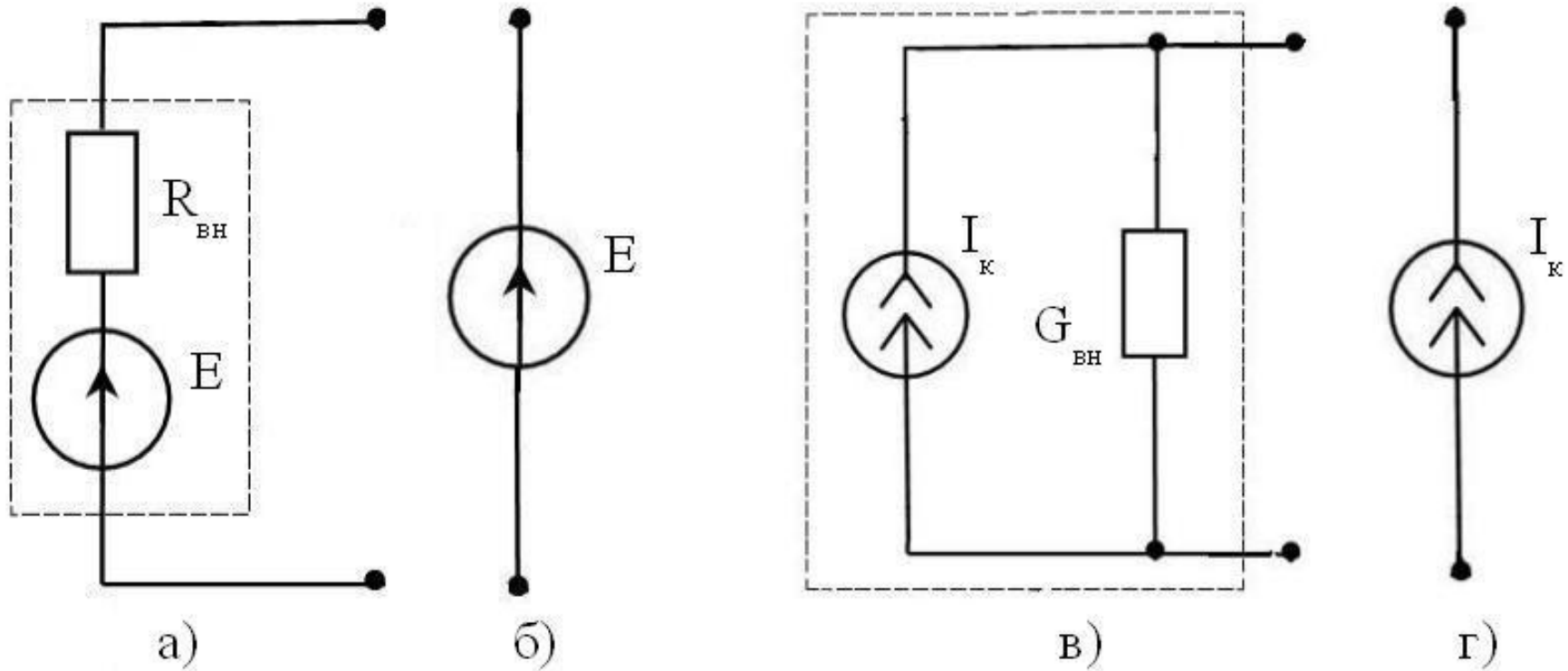
Элементы, ВАХ которых не являются прямыми линиями, называются **нелинейными**. Электрические цепи, имеющие хотя бы один нелинейный элемент, называются **нелинейными**.

В данном курсе будем рассматривать только линейные электрические цепи.



Источники электрической энергии

Все элементы электрической цепи можно разделить на **приемники** и **источники** электрической энергии.



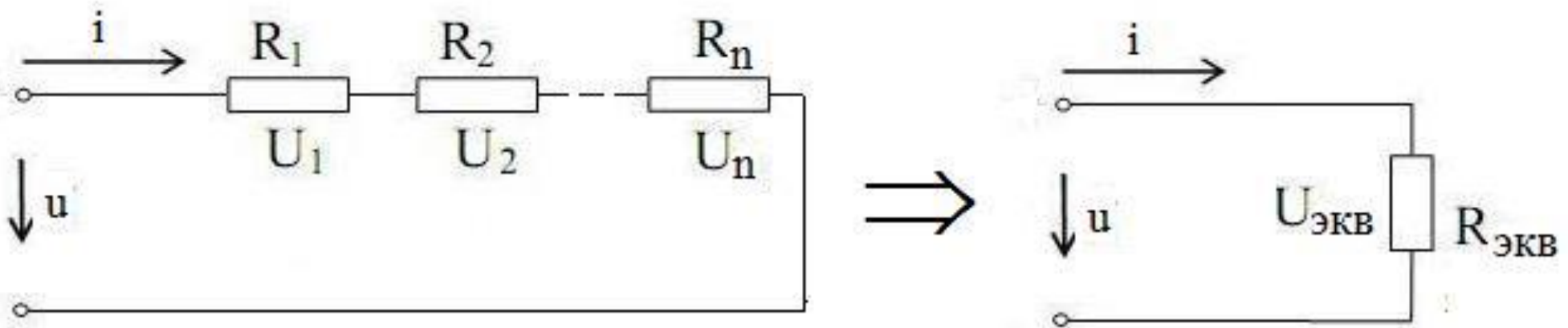
Если внутреннее сопротивление источников ЭДС (напряжения) равно нулю, а источника тока – бесконечности, то такие источники называют **идеальными** (рис. б и г).

В **реальных** источниках внутреннее сопротивление имеет конечное значение.

Расчет электрических цепей с последовательным соединением элементов

Последовательным соединением элементов называется такое, при котором начало последующего элемента соединяется с концом предыдущего.

При последовательном соединении во всех приемниках протекает одинаковый ток.



$$R_{\text{экв}} = \sum_{k=1}^n R_k, \quad \frac{1}{G_{\text{экв}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{G_k}.$$

Расчет электрических цепей с последовательным соединением элементов

Для последовательного соединения индуктивностей и емкостей используются аналогичные соотношения:

$$L_{\text{экв}} = \sum_{k=1}^n L_k, \quad \frac{1}{C_{\text{экв}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}.$$

При объединении последовательно соединенных идеальных источников напряжения эквивалентное напряжение определяется их алгебраической суммой, знаки в которой учитывают направление отдельных источников:

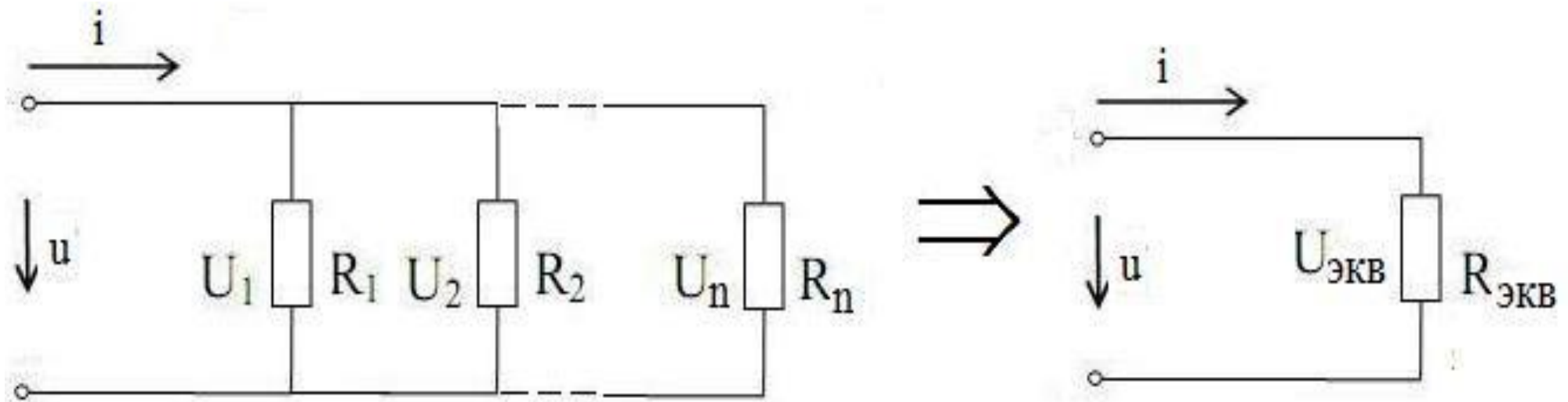
$$E_{\text{экв}} = \sum_{k=1}^n \pm E_k.$$

Последовательное соединение идеальных источников тока не допускается, так как значение тока эквивалентного источника в этом случае оказывается неопределенным. Однако последовательное включение реальных источников тока позволяет определить проводимость и ток эквивалентного источника по формулам:

$$\frac{I_{\text{экв}}}{G_{\text{экв}}} = \sum_{k=1}^n \pm \frac{I_k}{G_k}, \quad \frac{1}{G_{\text{экв}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{G_k}.$$

Расчет электрических цепей с параллельным соединением элементов

Параллельным соединением элементов называется такое, при котором начала всех элементов соединены в один узел, а концы в другой. При таком соединении цепь получается **разветвленной**, а сами элементы являются ее ветвями. Отличительной особенностью параллельного соединения является то, что все элементы находятся под одним и тем же напряжением.



$$\frac{1}{R_{\text{экв}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}, \quad G_{\text{экв}} = \sum_{k=1}^n G_k.$$

Расчет электрических цепей с параллельным соединением элементов

Для параллельного соединения индуктивностей и емкостей используются аналогичные соотношения:

$$\frac{1}{L_{\text{экв}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k}, \quad C_{\text{экв}} = \sum_{k=1}^n C_k$$

При объединении параллельно соединенных идеальных источников тока эквивалентный источник тока будет иметь значение силы тока, которое определяется их алгебраической суммой, знаки в которой учитывают направление отдельных источников:

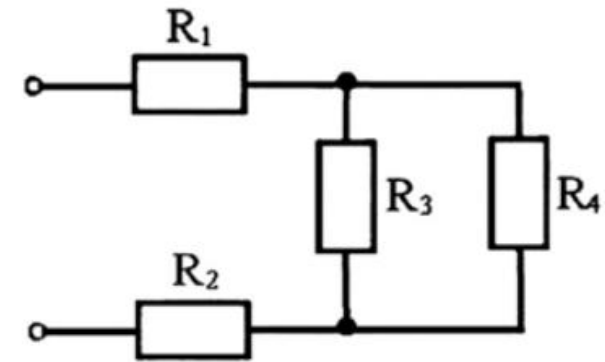
$$I_{\text{экв}} = \sum_{k=1}^n \pm I_k.$$

Параллельное соединение идеальных источников напряжения не допускается, так как при этом напряжение эквивалентного источника оказывается неопределенным. Однако параллельное соединение реальных источников напряжения, в которых учтены внутренние сопротивления составляющих источников, позволяет определить напряжение эквивалентного источника и его сопротивление по формулам:

$$\frac{E_{\text{экв}}}{R_{\text{экв}}} = \sum_{k=1}^n \pm \frac{E_k}{R_k}, \quad \frac{1}{R_{\text{экв}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}.$$

Расчет электрических цепей со смешанным соединением элементов

Смешанное соединение элементов представляет собой цепь, которая состоит из ряда последовательно и параллельно соединенных элементов. На рис. показано смешанное соединение резисторов.



Для расчета таких цепей выделяют отдельные участки с последовательным и параллельным соединением элементов и к ним применяют выше указанные соотношения.

Сначала определяется эквивалентное сопротивление параллельных 3-ей и 4-й ветвей.

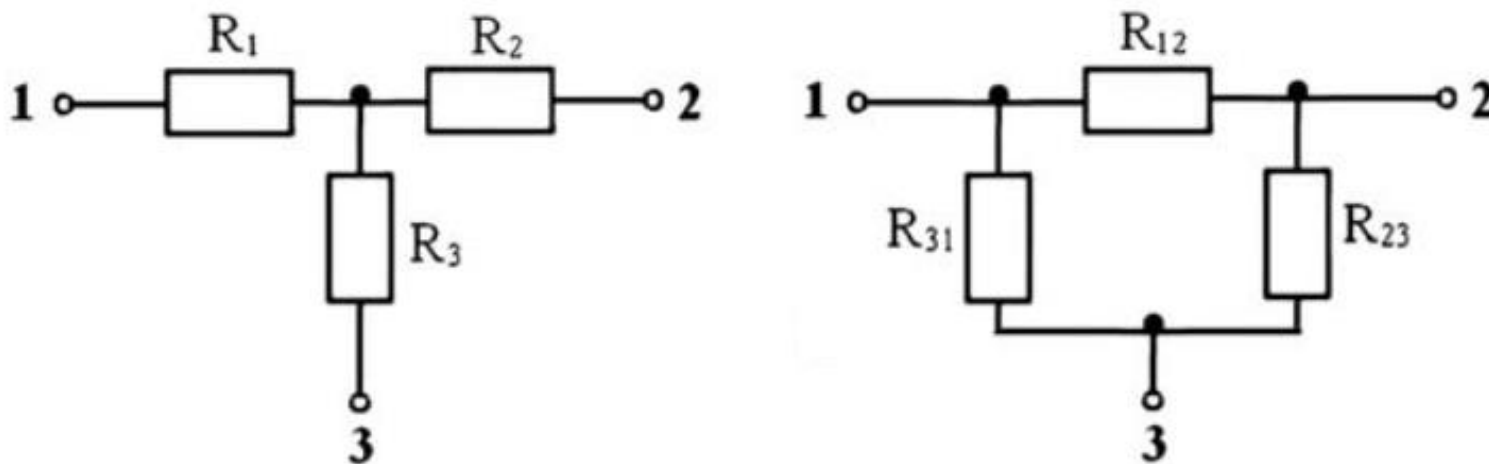
$$\text{Поскольку } \frac{1}{R_{34}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \text{ то } R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}.$$

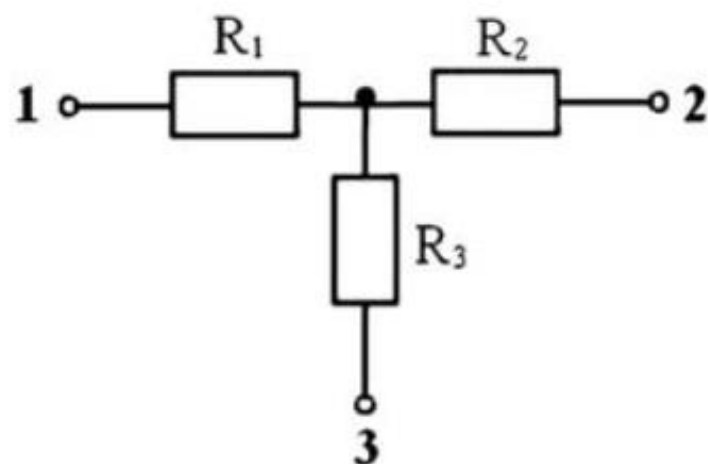
Сопротивления R_1 и R_2 включены последовательно с сопротивлением R_{34} , поэтому эквивалентное сопротивление всей цепи равно $R_{\text{экв}} = R_1 + R_2 + R_{34}$.

Преобразование соединения элементов звездой в соединение треугольником и обратное преобразование

Если электрическая цепь с четырьмя или более узлами не может быть отображена схемой со смешанным соединением элементов, то ее называют **сложноразветвлённой**. Если три ветви или более имеют один общий узел, то их соединение называется **звездой**.

Если электрическая цепь содержит более двух узлов и каждый узел соединен с другим только одной ветвью, то такое соединение называют **многоугольником**. Минимальное число узлов и ветвей в многоугольнике равно трем. При этом образуется очень распространенное на практике соединение элементов **треугольником**.

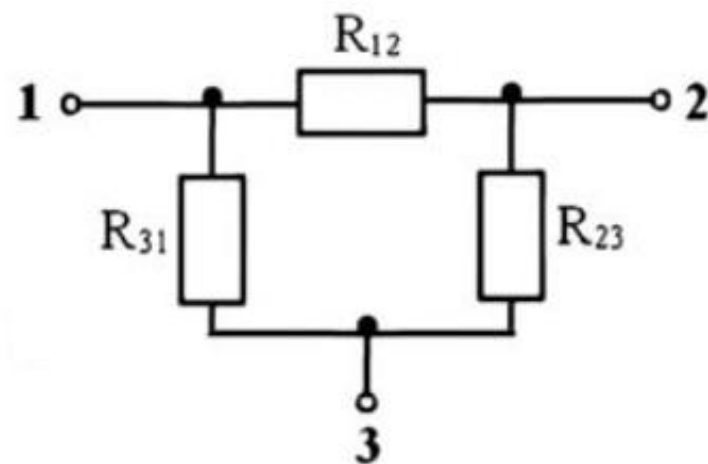




$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3},$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1},$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}.$$



$$R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}},$$

$$R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}},$$

$$R_3 = \frac{R_{23} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Преобразование соединения L элементов звездой в соединение треугольником и обратное преобразование

$$L_{12} = L_1 + L_2 + \frac{L_1 L_2}{L_3},$$

$$L_1 = \frac{L_{12} L_{31}}{L_{12} + L_{23} + L_{31}},$$

$$L_{23} = L_2 + L_3 + \frac{L_2 L_3}{L_1},$$

$$L_2 = \frac{L_{12} L_{23}}{L_{12} + L_{23} + L_{31}},$$

$$L_{31} = L_3 + L_1 + \frac{L_3 L_1}{L_2}.$$

$$L_3 = \frac{L_{23} L_{31}}{L_{12} + L_{23} + L_{31}}.$$

Преобразование соединения C элементов звездой в соединение треугольником и обратное преобразование

$$C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3},$$

$$C_1 = C_{31} + C_{12} + \frac{C_{31} C_{12}}{C_{23}},$$

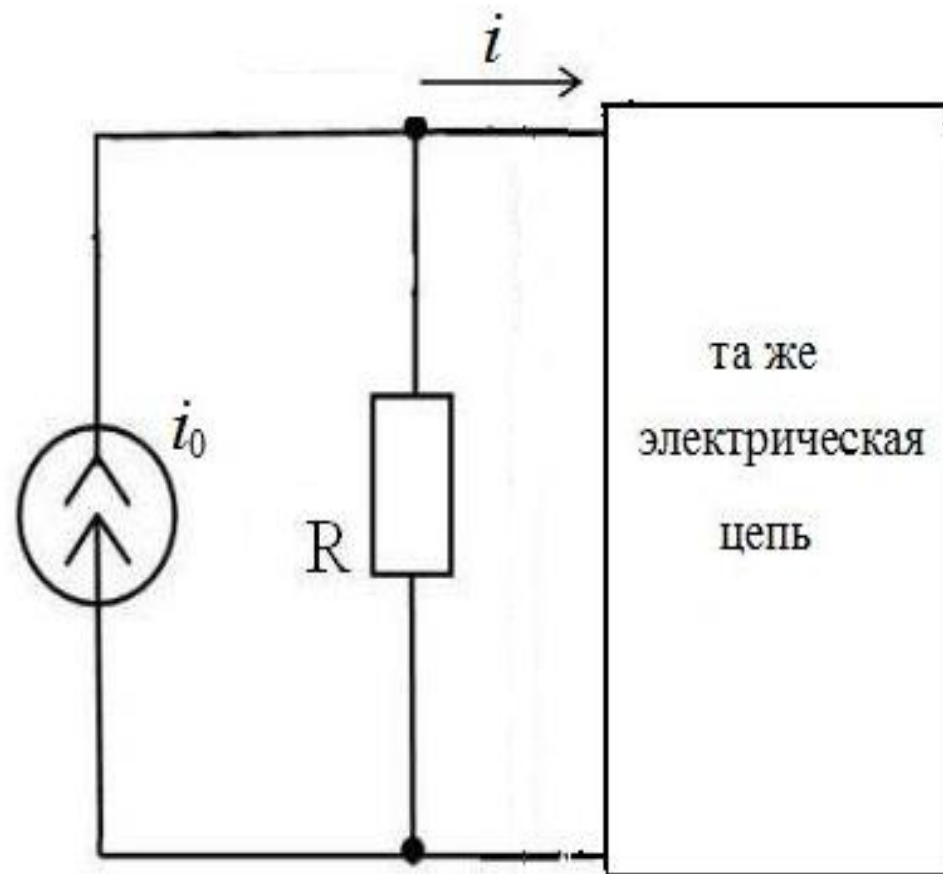
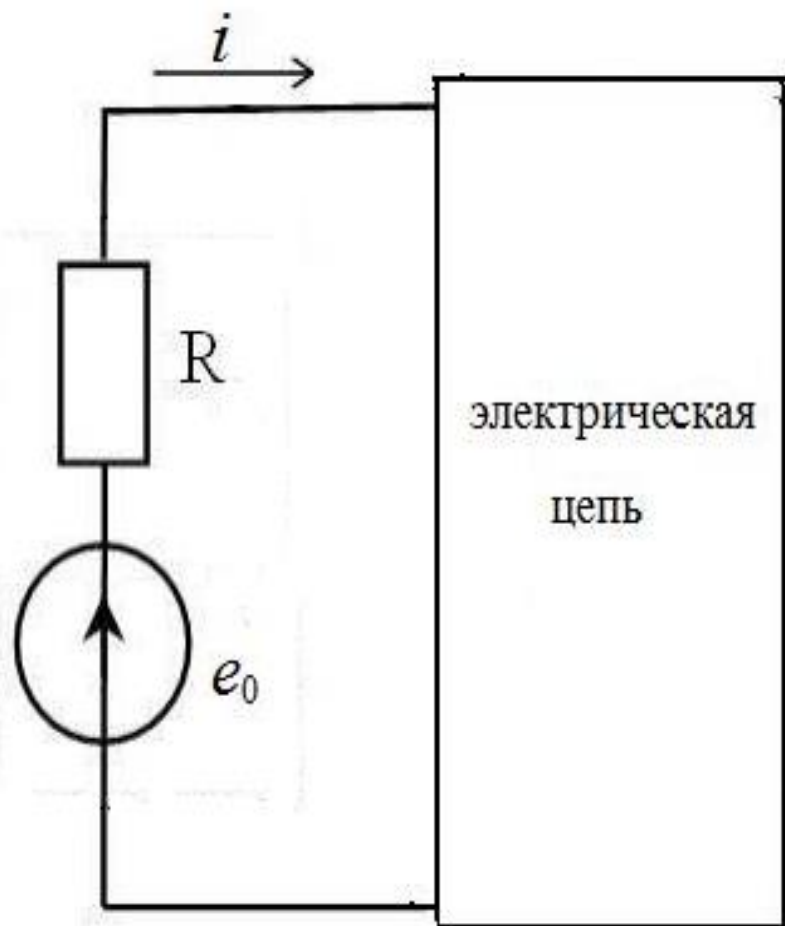
$$C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_1 + C_2 + C_3},$$

$$C_2 = C_{12} + C_{23} + \frac{C_{12} C_{23}}{C_{31}},$$

$$C_{31} = \frac{C_3 C_1}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

$$C_3 = C_{23} + C_{31} + \frac{C_{23} C_{31}}{C_{12}}.$$

Эквивалентные преобразования источников



$$i_0 = \frac{e_0}{R}$$

Электрические цепи постоянного тока

Если электрический ток постоянный, то отсутствует явление самоиндукции и напряжение на катушке индуктивности равно нулю. Постоянный ток через ветвь с емкостью не проходит, т.е. ветвь с конденсатором равносильна разомкнутой. Таким образом, в цепях установившегося постоянного тока из пассивных элементов остаются только сопротивления.

1. Закон Ома: $U = IR$ (или $I = U/R = UG$).

2. Закон Джоуля-Ленца: $Q = Pt$, где Q – количество теплоты, $[Q] = 1$ Дж; $P = UI = I^2R$ – мощность, $[P] = 1$ Вт (Ватт); t – время, $[t] = 1$ с (секунда).

3. Законы Кирхгофа:

- Если токи, приходящие к узлу, считать положительными, а уходящие – отрицательными, то **1-й закон Кирхгофа** можно формулировать так: алгебраическая сумма токов, входящих в узел, равна нулю, т. е. для каждого узла соблюдается равенство $\sum_{k=1}^n \pm I_k = 0$, где n – число токов, сходящихся в узле.
- **2-й закон Кирхгофа** относится к любому замкнутому контуру разветвленной цепи и выражается следующим образом: алгебраическая сумма ЭДС источников в любом замкнутом контуре электрической цепи равна алгебраической сумме падений напряжения на элементах этого контура:

$$\sum_{k=1}^n \pm I_k R_k = \sum_{k=1}^l \pm E_k \quad \text{где } n \text{ – число сопротивлений в замкнутом контуре,} \\ l \text{ – число источников ЭДС, входящих в контур.}$$

Законы Кирхгофа

- Если токи, приходящие к узлу, считать положительными, а уходящие – отрицательными, то **1-й закон Кирхгофа** можно формулировать так: алгебраическая сумма токов, входящих в узел, равна нулю, т. е. для каждого узла соблюдается равенство $\sum_{k=1}^n \pm I_k = 0$, где n – число токов, сходящихся в узле.
- **2-й закон Кирхгофа** относится к любому замкнутому контуру разветвленной цепи и выражается следующим образом: алгебраическая сумма ЭДС источников в любом замкнутом контуре электрической цепи равна алгебраической сумме падений напряжения на элементах этого контура:

$$\sum_{k=1}^n \pm I_k R_k = \sum_{k=1}^l \pm E_k$$

где n – число сопротивлений в замкнутом контуре,
 l – число источников ЭДС, входящих в контур.

При составлении уравнений на основании 2-го закона Кирхгофа необходимо строго придерживаться **правила знаков**, которое состоит в следующем. Произвольно выбрав направление обхода контура (по часовой либо против часовой стрелки), считают токи, идущие вдоль выбранного направления обхода, положительными, а токи, идущие против направления обхода, – отрицательными. Соответственно этому ЭДС источников, находящихся в рассматриваемом контуре, считаются положительными, если направление обхода совпадает с направлением действия сторонних сил внутри ЭДС и отрицательными – в противоположном случае.

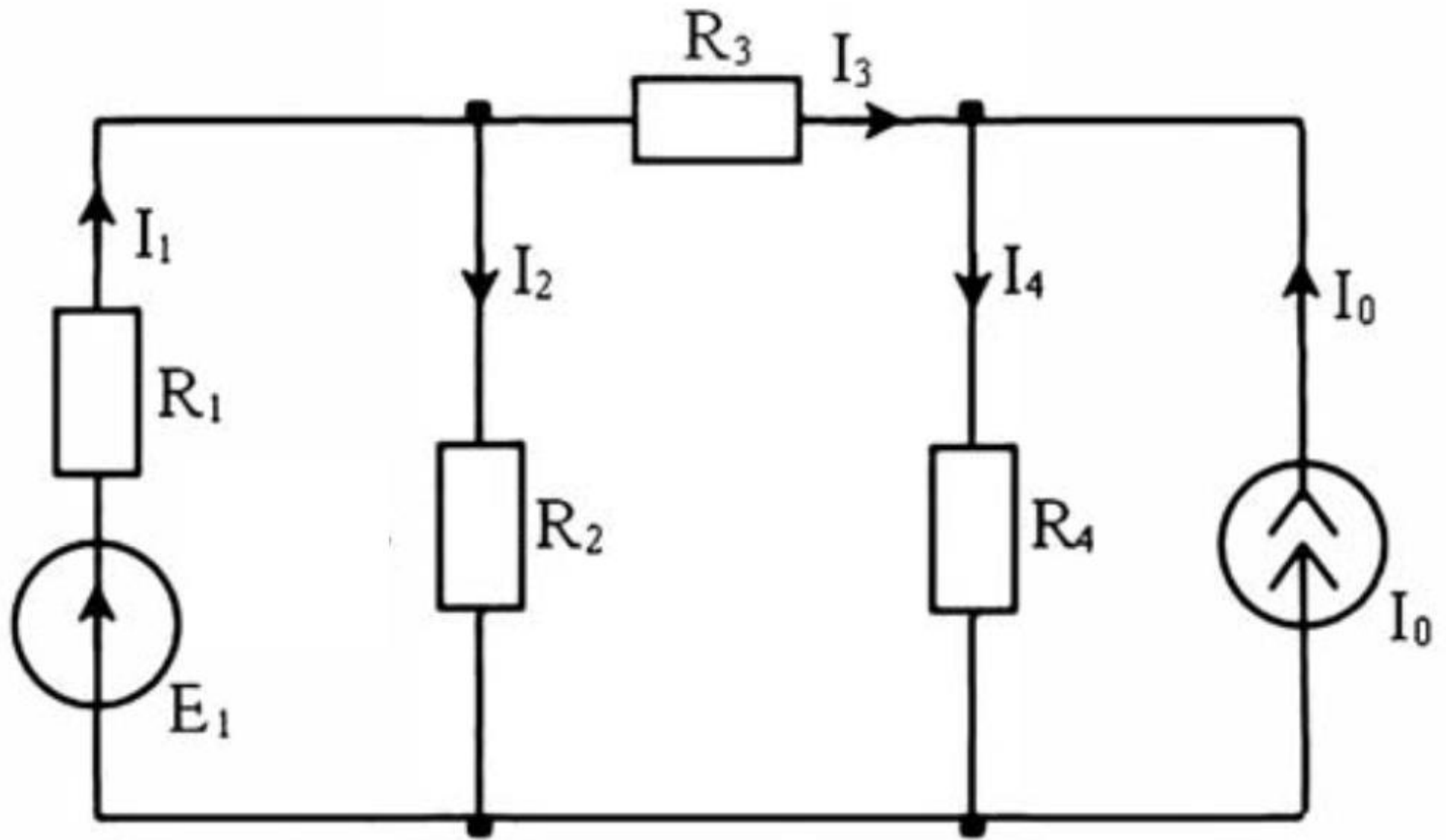
Законы Кирхгофа

При составлении системы уравнений следует учесть также, что если в сложной электрической цепи имеется m узлов, то на основании 1-го закона Кирхгофа можно записать уравнения только для $(m-1)$ узла. Уравнение для последнего m -го узла будет следствием предыдущих $(m-1)$ уравнений. Если в сложной электрической цепи имеется p ветвей (участков между двумя узлами), то число независимых уравнений на основании 2-го закона Кирхгофа равно $p-(m-1)$. Остальные из этих уравнений являются следствием предыдущих. Выбирать контуры нужно таким образом, чтобы каждый новый контур содержал хотя бы один участок цепи, не входивший в уже выбранные контуры. При решении уравнений для токов могут быть получены отрицательные значения, это означает, что фактически ток течет в направлении, обратном предположенному.

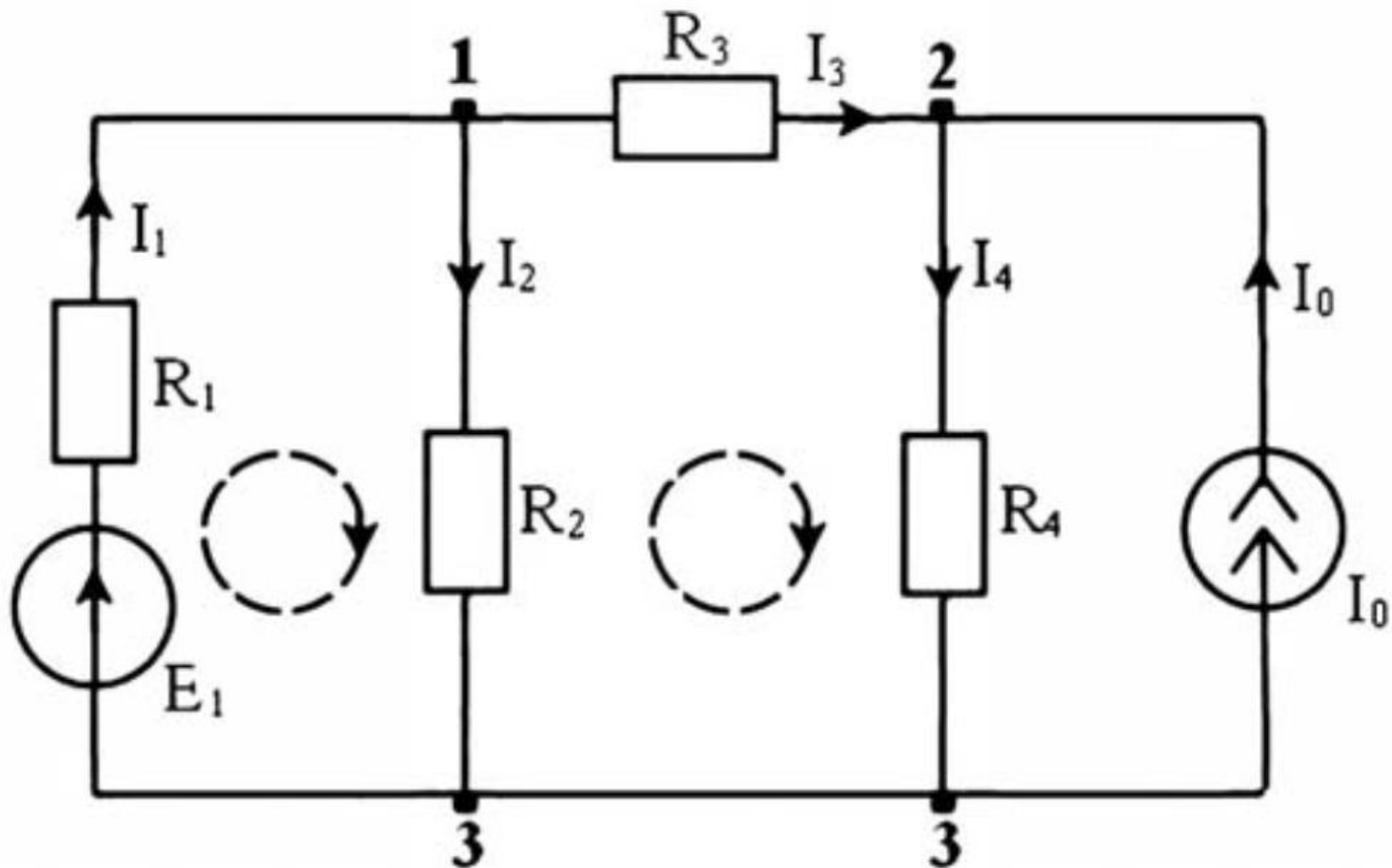
Порядок расчета цепей, основанный на использовании законов Кирхгофа, следующий:

- 1) выбирают положительные направления токов в ветвях;
- 2) составляют $(m-1)$ независимых уравнений по первому закону Кирхгофа;
- 3) выбирают направления обхода независимых контуров;
- 4) составляют $p-(m-1)$ независимых уравнений по второму закону Кирхгофа;
- 5) решают совместно полученную систему уравнений.

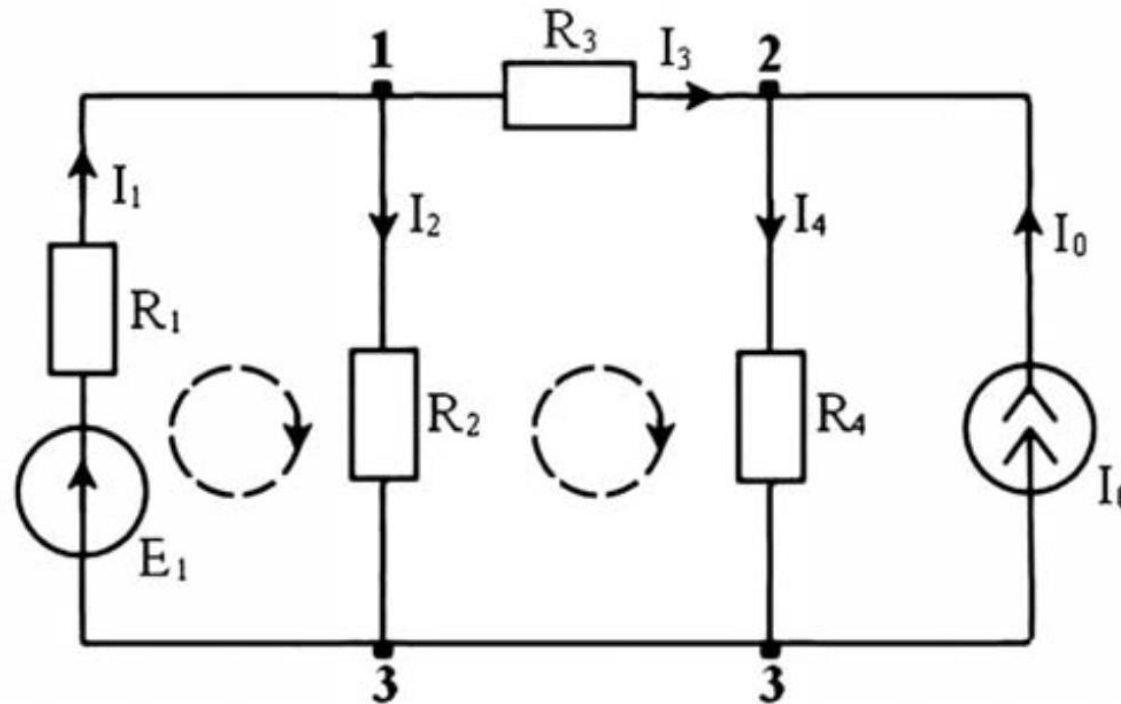
Законы Кирхгофа



Законы Кирхгофа



Законы Кирхгофа



Пользуясь законами Кирхгофа, можно составить систему уравнений для нахождения токов в ветвях схемы электрической цепи, изображенной на рис.

Для 1-го и 3-го узлов по первому закону Кирхгофа $I_1 - I_2 - I_3 = 0$,
 $-I_1 + I_2 + I_4 - I_0 = 0$.

Для контура, образованного первой и второй ветвью по второму закону Кирхгофа: $I_1 R_1 + I_2 R_2 = E_1$.

Для контура, образованного второй, третьей и четвертой ветвями по второму закону Кирхгофа: $I_3 R_3 + I_4 R_4 - I_2 R_2 = 0$.

Законы Кирхгофа

Применение законов Кирхгофа для расчета электрических цепей приводит к необходимости решения большого количества алгебраических уравнений и получению весьма громоздких выражений, особенно в случае сложных электрических цепей, т. е. разветвленных цепей, содержащих два и более источника питания, действующих в разных ветвях.

Для расчета сложных электрических цепей разработаны методы, позволяющие уменьшить число уравнений по сравнению с применением законов Кирхгофа. Это метод контурных токов, метод узловых потенциалов, метод эквивалентного генератора и др.

Метод контурных токов

При расчете электрической цепи этим методом составляют систему уравнений по второму закону Кирхгофа для всех независимых контуров, затем полагают, что в каждом независимом контуре протекает свой независимый контурный ток I_j^k , условное положительное направление которого совпадает с обходом этого контура. В общем случае система уравнений для цепи, имеющей n -независимых контуров, имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{11} I_1^k + R_{12} I_2^k + \dots + R_{1n} I_n^k = E_1^k, \\ R_{21} I_1^k + R_{22} I_2^k + \dots + R_{2n} I_n^k = E_2^k, \\ \dots \\ R_{n1} I_1^k + R_{n2} I_2^k + \dots + R_{nn} I_n^k = E_n^k. \end{array} \right.$$

Метод контурных токов

где $E_1^k, E_2^k, \dots, E_n^k$ – контурные ЭДС, равные алгебраической сумме ЭДС в соответствующих контурах, причем ЭДС считают положительными, если их условные положительные направления совпадают с направлением обхода контура, и отрицательными, если их направления противоположны.

$R_{11}, R_{22}, \dots, R_{nn}$ – собственные сопротивления тех же контуров, равны сумме сопротивлений всех резисторов, принадлежащих соответствующему контуру.

$R_{12} = R_{21}, R_{23} = R_{32}, \dots$ – взаимные сопротивления контуров, равны сумме сопротивлений резисторов, принадлежащих одновременно двум контурам, номера которых указаны в индексе, при этом взаимные сопротивления надо принимать:

- положительными, если контурные токи в них направлены одинаково;
- отрицательными, если контурные токи в них направлены встречно;
- равными нулю, если контуры не имеют общих ветвей.

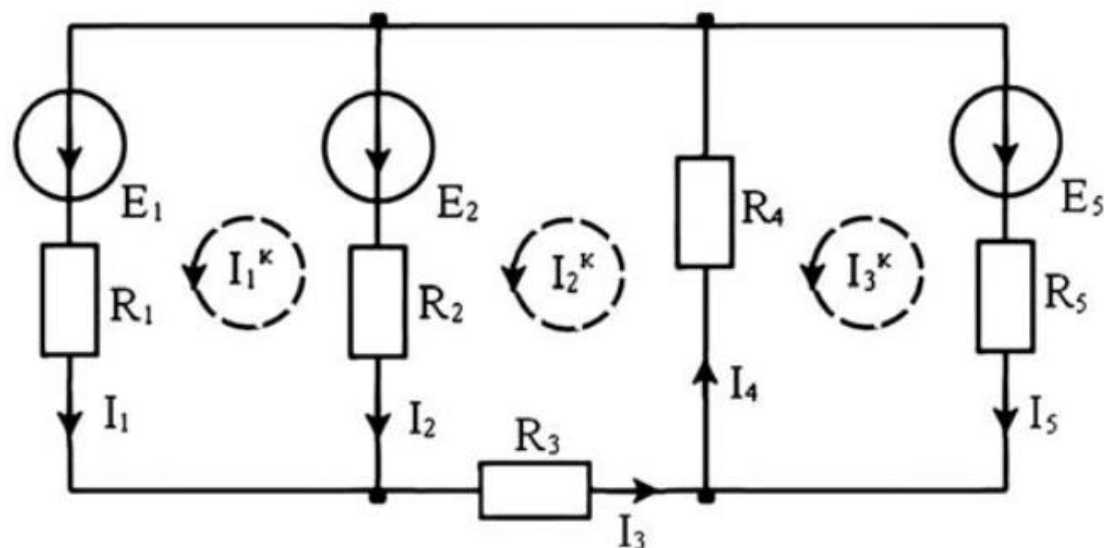
Метод контурных токов

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{11} I_1^{\kappa} + R_{12} I_2^{\kappa} + \dots + R_{1n} I_n^{\kappa} = E_1^{\kappa}, \\ R_{21} I_1^{\kappa} + R_{22} I_2^{\kappa} + \dots + R_{2n} I_n^{\kappa} = E_2^{\kappa}, \\ \dots \\ R_{n1} I_1^{\kappa} + R_{n2} I_2^{\kappa} + \dots + R_{nn} I_n^{\kappa} = E_n^{\kappa}. \end{array} \right.$$

После решения системы уравнений относительно контурных токов определяют токи в ветвях, предварительно задав их условные положительные направления.

Если ветвь является общей для нескольких контуров, то ток в ней будет равен алгебраической сумме контурных токов, замыкающих эту ветвь.

Метод контурных токов



$$R_{11}I_1^k + R_{12}I_2^k + R_{13}I_3^k = E_1^k,$$

$$R_{21}I_1^k + R_{22}I_2^k + R_{23}I_3^k = E_2^k,$$

$$R_{31}I_1^k + R_{32}I_2^k + R_{33}I_3^k = E_3^k.$$

где $R_{11} = R_1 + R_2$, $R_{22} = R_2 + R_3 + R_4$, $R_{33} = R_4 + R_5$,

$$R_{12} = R_{21} = -R_2, \quad R_{23} = R_{32} = -R_4, \quad R_{13} = R_{31} = 0,$$

$$E_1^k = E_1 - E_2, \quad E_2^k = E_2, \quad E_3^k = -E_5.$$

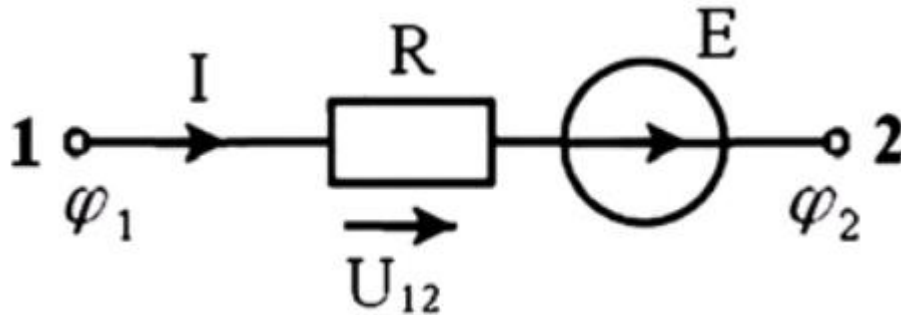
После нахождения контурных токов можно найти токи в ветвях:

$$I_1 = I_1^k, \quad I_2 = I_2^k - I_1^k, \quad I_3 = I_2^k, \quad I_4 = I_2^k - I_3^k, \quad I_5 = -I_3^k.$$

Метод узловых потенциалов

Ток в любой ветви электрической цепи можно определить по известным потенциалам узлов, к которым она подключена, или напряжению между этими узлами. Согласно второму закону Кирхгофа для любой ветви электрической цепи, схема которой приведена на рис., при заданных условных положительных направлениях ЭДС, тока и напряжения можно написать уравнение:

$$I \cdot R - U_{12} = E.$$



Напряжение между узлами находится как разность потенциалов между этими узлами: $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$.

Для ветви, изображенной на рис., ток находится следующим образом:

$$I = \frac{E + U_{12}}{R} \text{ — закон Ома для ветви с источником ЭДС.}$$

Метод узловых потенциалов

Метод расчета электрических цепей, в котором в качестве неизвестных принимают потенциалы узлов схемы, называют **методом узловых потенциалов**. Метод более эффективен по сравнению с методом контурных токов в том случае, если число узлов в схеме меньше или равно числу независимых контуров, так как в любой электрической цепи потенциал одного из узлов можно принять равным 0, а число узлов, потенциалы которых следует определить относительно этого узла, станет равным $(m - 1)$, где m — число узлов в схеме.

Система уравнений для неизвестных потенциалов любой электрической цепи, имеющей m узлов, может быть получена из системы уравнений, составленной по первому закону Кирхгофа для $n = m - 1$ узлов, если в ней токи в ветвях выразить через потенциалы узлов в соответствии с законом Ома для ветви с источником ЭДС.

Метод узловых потенциалов

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{11}\varphi_1 + G_{12}\varphi_2 + \dots + G_{1n}\varphi_n = I_1^y, \\ G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 + \dots + G_{2n}\varphi_n = I_2^y, \\ \dots \\ G_{n1}\varphi_1 + G_{n2}\varphi_2 + \dots + G_{nn}\varphi_n = I_n^y. \end{array} \right.$$

$$I^y = \sum_{i=1}^n \frac{\pm E_i}{R_i} + \sum_{j=1}^k \pm I_j.$$

Метод узловых потенциалов

где $n = m - 1$; $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ – потенциалы 1, 2, ..., n узлов относительно узла q , потенциал которого был принят равным 0.

G_{kk} – сумма проводимостей всех ветвей, подключенных к k -му узлу, $G_{kj} = G_{jk}$ – сумма проводимостей ветвей между узлами k и j , взятых со знаком «минус». Если между узлами k и j нет общих ветвей, то считают $G_{kj} = G_{jk} = 0$.

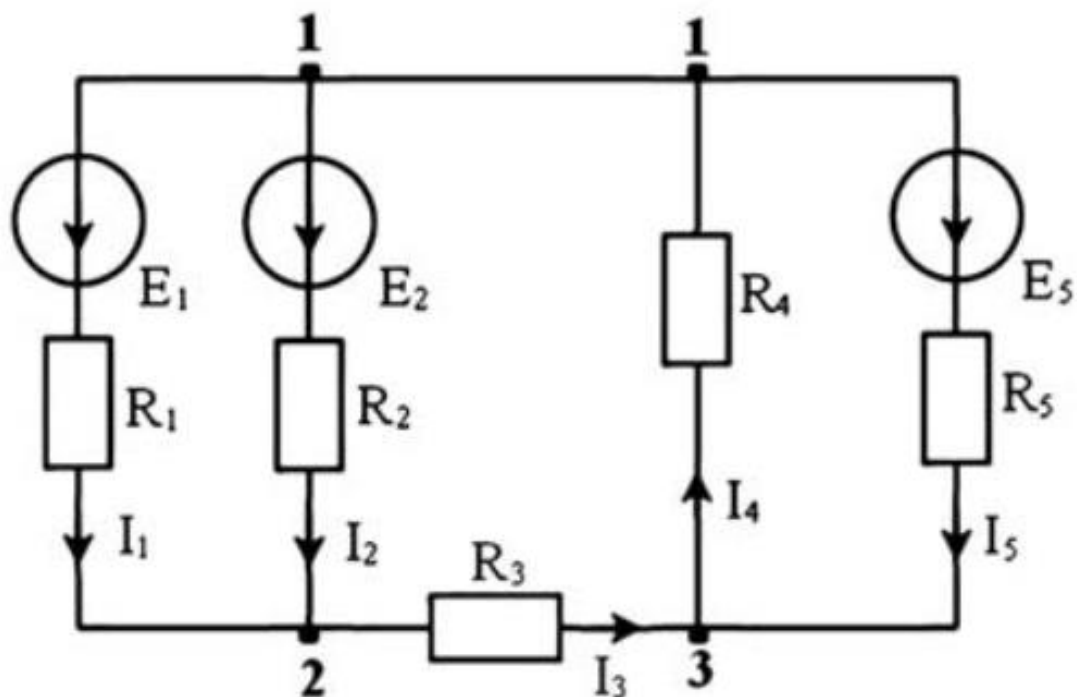
I_k^y – узловой ток, равный алгебраической сумме токов всех ветвей, содержащих источники ЭДС и источники токов, подключенных к узлу k , причем каждый из них определяется по уравнению

$$I_k^y = \sum_j \pm \frac{E_j}{R_j} \pm I_j,$$

здесь токи, направленные к узлу, берутся со знаком «+», а от узла – со знаком «−».

После решения системы уравнений относительно узловых потенциалов определяются напряжения между узлами и токи в ветвях.

Метод узловых потенциалов



Система уравнений для цепи, изображенной на рис., если предположить $\varphi_3 = 0$, будет иметь следующий вид:

$$G_{11}\varphi_1 + G_{12}\varphi_2 = I_1^y,$$

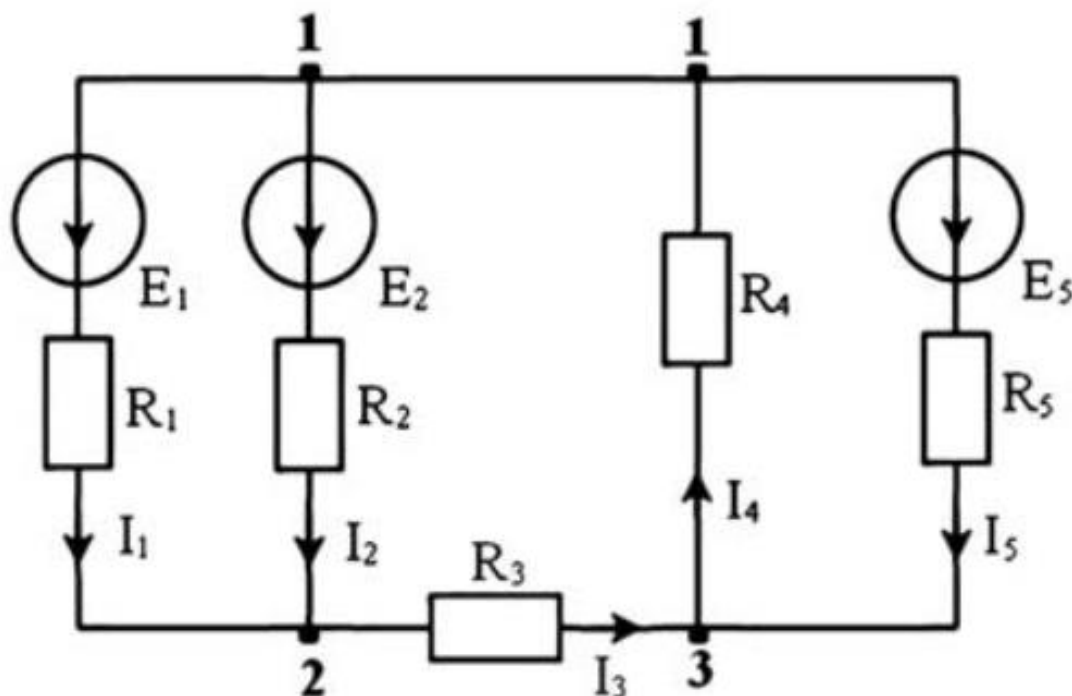
$$G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 = I_2^y.$$

где $G_{11} = G_1 + G_2 + G_4 + G_5 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5},$

$$G_{22} = G_1 + G_2 + G_3 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}, \quad G_{12} = G_{21} = -G_1 - G_2 = -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2},$$

$$I_1^y = -\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} - \frac{E_5}{R_5}, \quad I_2^y = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}.$$

Метод узловых потенциалов



Система уравнений для цепи, изображенной на рис., если предположить $\varphi_3 = 0$, будет иметь следующий вид:

$$G_{11}\varphi_1 + G_{12}\varphi_2 = I_1^y,$$

$$G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 = I_2^y.$$

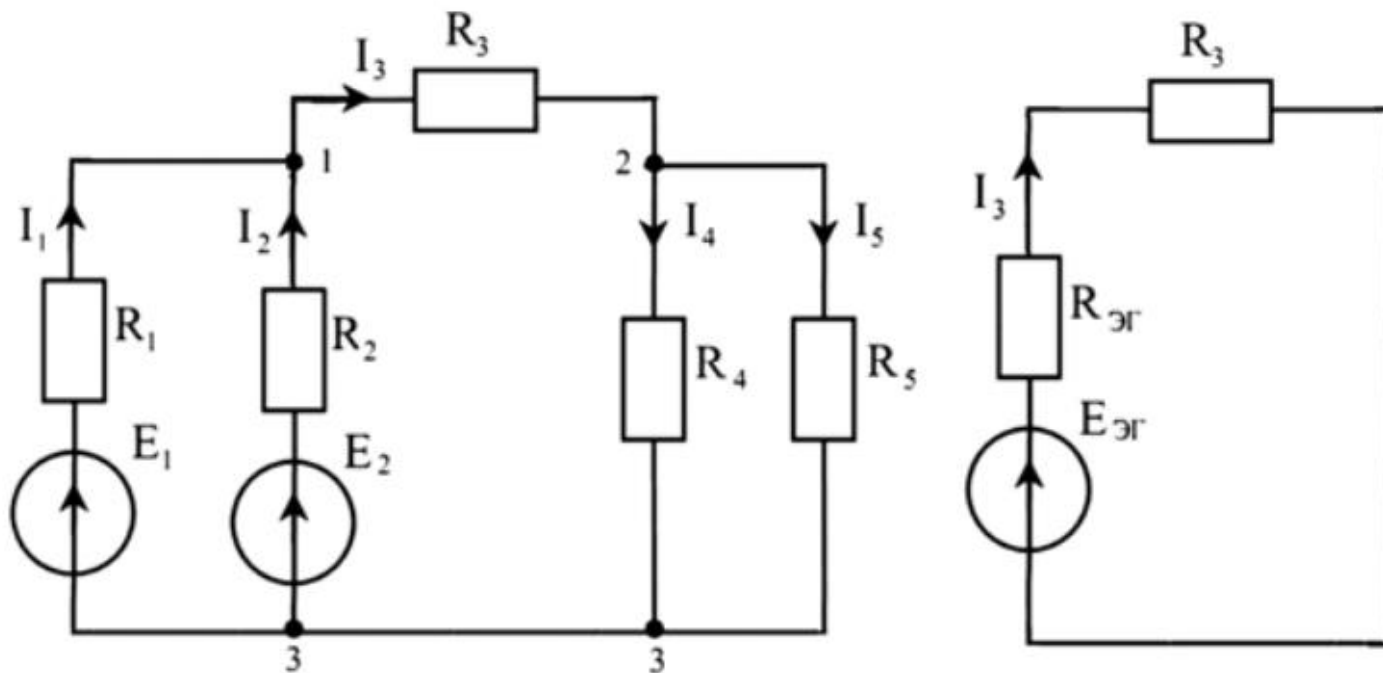
После нахождения потенциалов узлов φ_1 и φ_2 , можно найти напряжения между всеми узлами цепи и токи в ветвях.

$$U_{12} = U_1 = U_2 = \varphi_1 - \varphi_2, \quad U_{23} = U_3 = \varphi_2, \quad U_{31} = U_4 = -\varphi_1, \quad U_{13} = U_5 = \varphi_1,$$

$$I_1 = \frac{E_1 + U_1}{R_1}, \quad I_2 = \frac{E_2 + U_2}{R_2}, \quad I_3 = \frac{U_3}{R_3}, \quad I_4 = \frac{U_4}{R_4}, \quad I_5 = \frac{E_5 + U_5}{R_5}.$$

Метод эквивалентного генератора

Метод эквивалентного генератора позволяет в ряде случаев относительно просто определить ток в какой-либо одной ветви сложной электрической цепи и исследовать поведение этой ветви при изменении ее сопротивления. Сущность метода заключается в том, что по отношению к исследуемой ветви сложная цепь заменяется эквивалентным источником (эквивалентным генератором – ЭГ) с ЭДС $E_{ЭГ}$ и внутренним сопротивлением $R_{ЭГ}$.



$$I_3 = \frac{E_{ЭГ}}{R_{ЭГ} + R_3},$$

и задача сводится
к определению
значений $E_{ЭГ}$ и $R_{ЭГ}$.

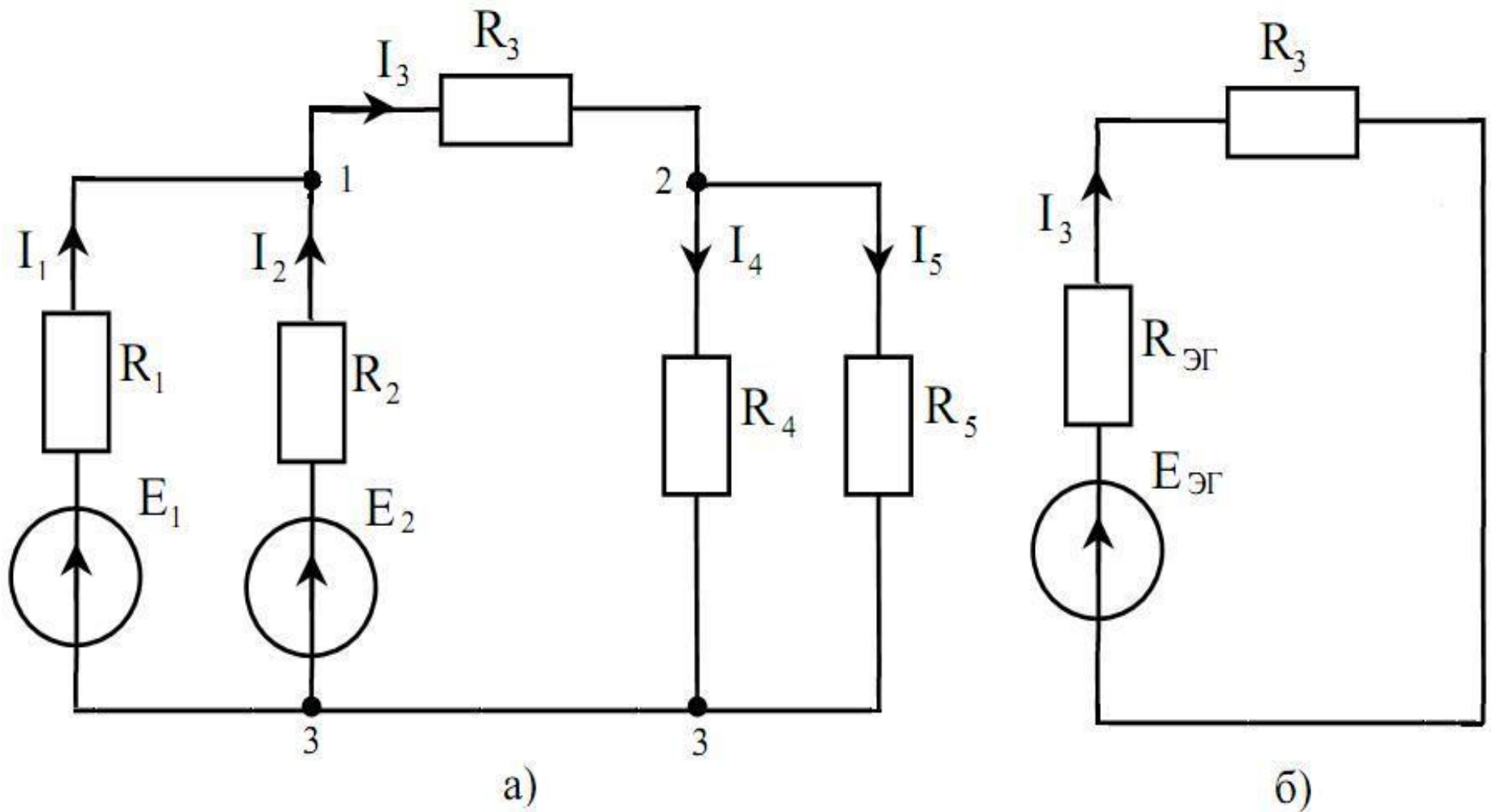
Метод эквивалентного генератора

Уравнение справедливо при любых значениях сопротивления резистора R_3 . Так, при холостом ходе ЭГ, когда узлы 1 и 2 разомкнуты, $I_3 = 0$ и $E_{ЭГ} = U_{xx}$, где $U_{xx} = (\varphi_1 - \varphi_2)$ – напряжение холостого хода эквивалентного генератора, φ_1 и φ_2 – потенциалы узлов 1 и 2 в этом режиме.

При коротком замыкании ветви ($E_3 = 0$) ток в ней равен $I_{K3} = E_{ЭГ} / R_{ЭГ} = U_{xx} / R_{ЭГ}$, откуда внутреннее сопротивление эквивалентного генератора $R_{ЭГ} = U_{xx} / I_{K3}$. Таким образом, для определения параметров эквивалентного генератора необходимо рассчитать любым из известных методов потенциалы узлов φ_1 и φ_2 в режиме холостого хода эквивалентного генератора и ток короткого замыкания в исследуемой ветви.

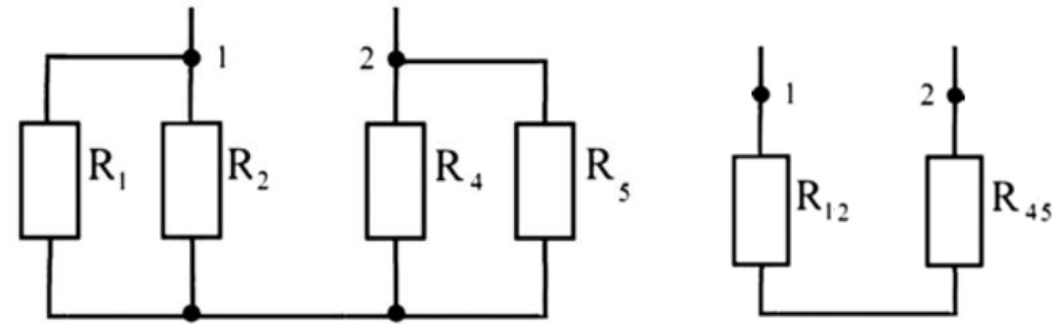
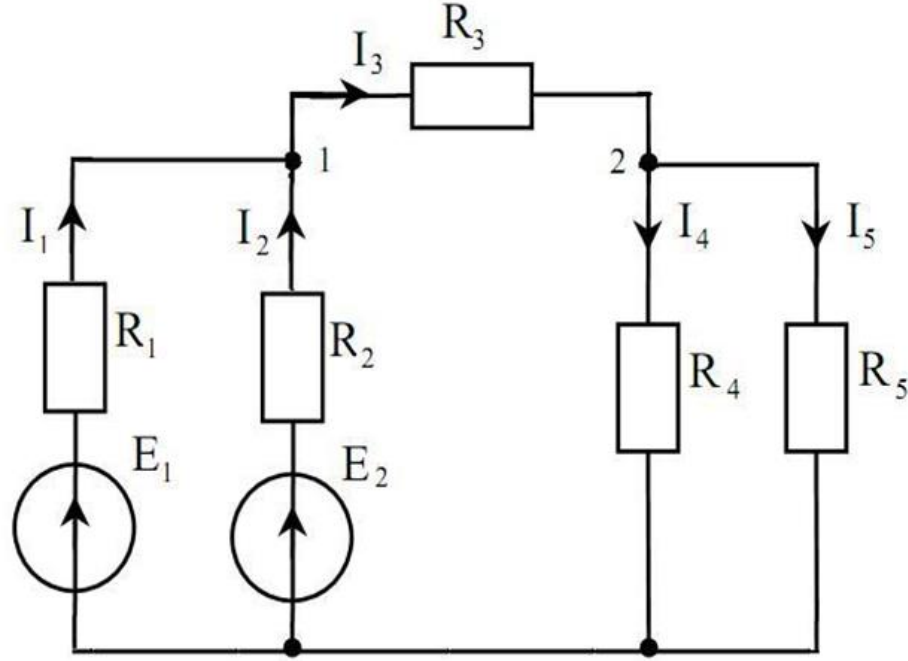
Приведенный метод определения параметров эквивалентного генератора является наиболее универсальным, однако в ряде случаев сопротивление $R_{ЭГ}$ проще рассчитать как эквивалентное сопротивление между разомкнутыми узлами исследуемой ветви сложной электрической цепи в предположении, что все источники ЭДС в цепи закорочены.

Метод эквивалентного генератора



$$I_3 = \frac{E_{\text{эГ}}}{R_{\text{эГ}} + R_3}$$

Метод эквивалентного генератора



$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

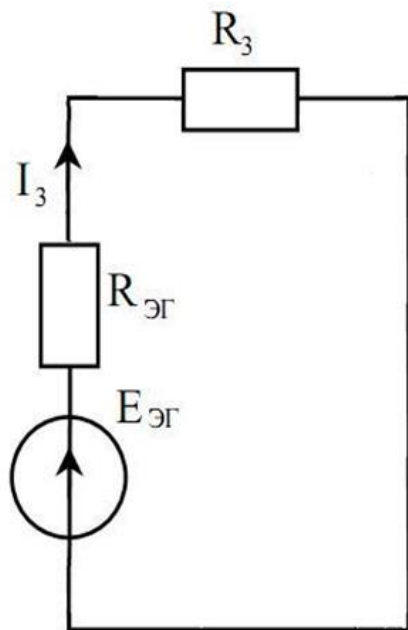
$$R_{45} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}$$

$$R_{\Sigma\Gamma} = R_{12} + R_{45} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}.$$

$$\frac{E_{\Sigma\Gamma}}{R_{12}} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}$$

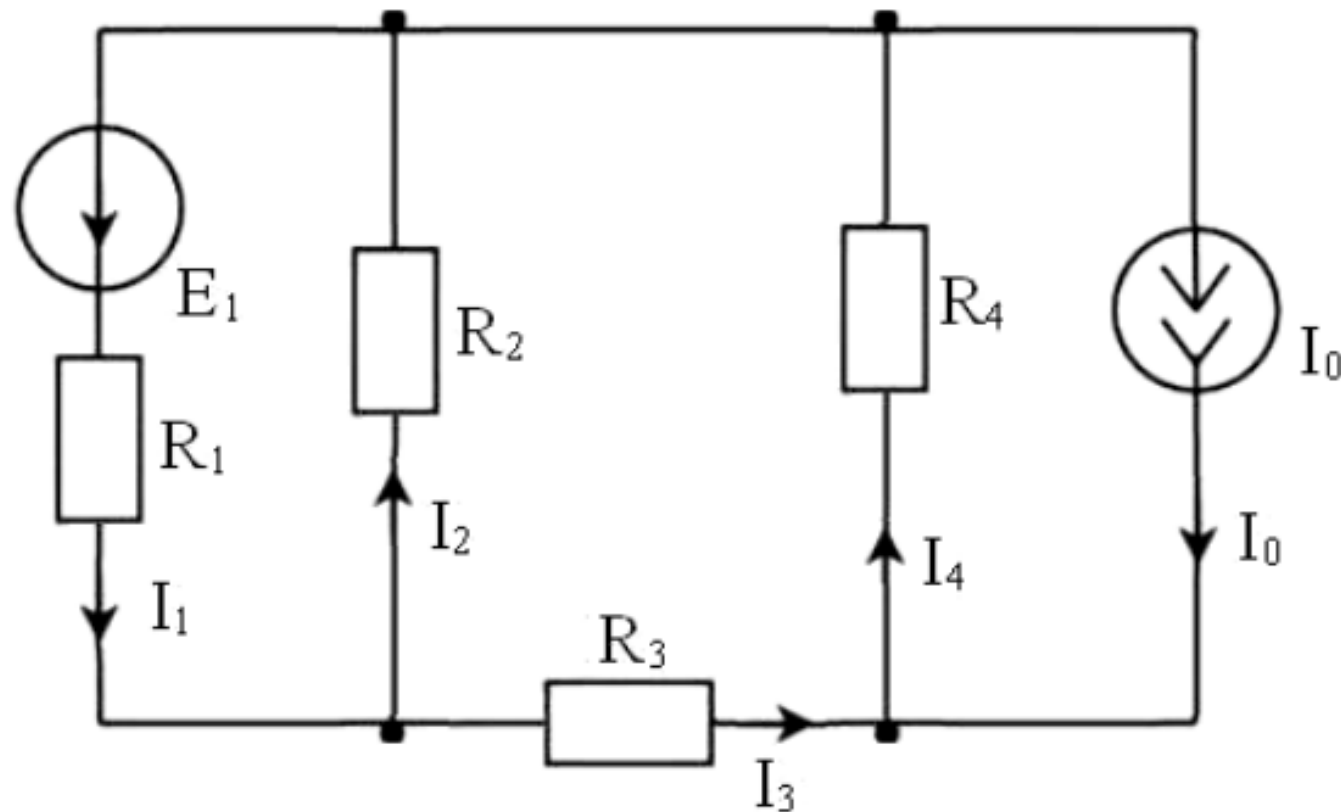
$$E_{\Sigma\Gamma} = \left(\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} \right) \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

$$I_3 = \frac{E_{\Sigma\Gamma}}{R_{\Sigma\Gamma} + R_3}$$

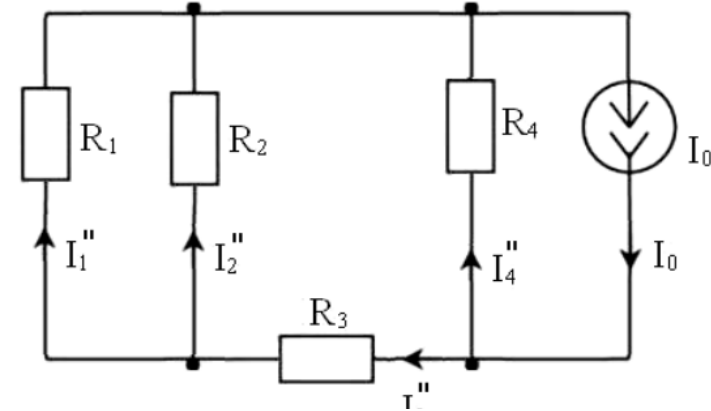
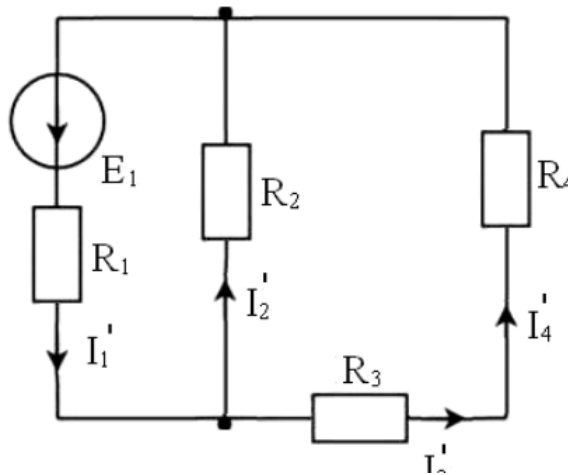
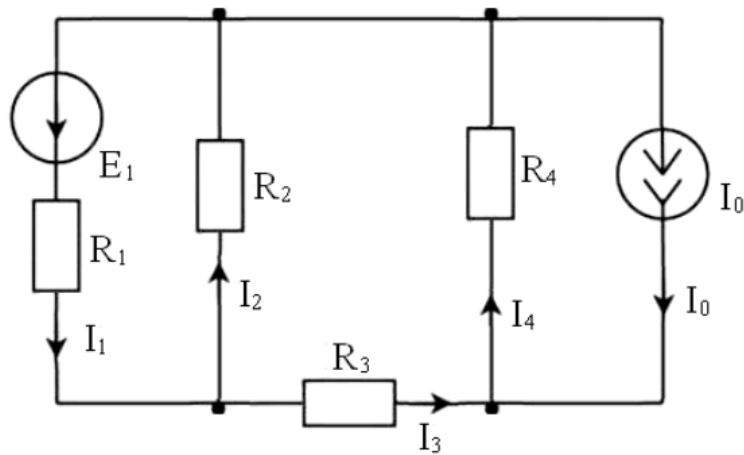


Принцип и метод наложения

Для линейных цепей любой ток или напряжение на участке цепи могут быть определены суммой составляющих, рассчитанных отдельно от действия каждого источника или групп источников. Такое свойство линейных цепей называется **принципом наложения**. Метод расчета токов и напряжений в линейных электрических цепях, основанный на этом принципе, называется **методом наложения**.



Принцип и метод наложения



Теперь можно найти токи в ветвях электрической цепи, содержащей два источника, как алгебраическую сумму частичных токов в соответствующих ветвях. За положительное направление тока в ветви выбирается его направление в схеме с двумя источниками.

$$I_1 = I'_1 - I''_1, \quad I_2 = I'_2 + I''_2, \quad I_3 = I'_3 - I''_3, \quad I_4 = I'_4 + I''_4.$$

Другими словами, частичный ток, совпадающий по направлению с искомым, считается положительным, а несовпадающий – отрицательным.

Электрические однофазные цепи синусоидального тока

В настоящее время переменный ток получил на практике гораздо большее применение, чем постоянный. Это объясняется тем, что синхронные генераторы могут быть выполнены на значительно большие мощности и более высокие напряжения, чем генераторы постоянного тока. К тому же переменный ток позволяет легко изменять величину напряжения с помощью трансформатора, что необходимо при передаче электроэнергии на большие расстояния.

В настоящее время практически вся вырабатываемая электроэнергия является энергией синусоидального тока. Только лишь некоторую долю электроэнергии преобразуют в энергию постоянного тока.

В электрических цепях синусоидального тока присутствует источник синусоидального напряжения или тока. Может быть и несколько источников, но обязательно одинаковой частоты.

Расчеты электрических цепей синусоидального тока можно проводить как по **мгновенным значениям** напряжения и тока, так и по **их комплексным значениям**.

Электрические однофазные цепи синусоидального тока

В электрических цепях синусоидального тока напряжения и токи всех ветвей изменяются во времени по синусоидальному закону. Общий вид этого закона для силы тока имеет вид (см. рис.):

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

где i — мгновенное значение тока в момент времени t , амплитуда I_m равна максимальному значению силы тока, ω — угловая частота, ψ_i — начальная фаза.

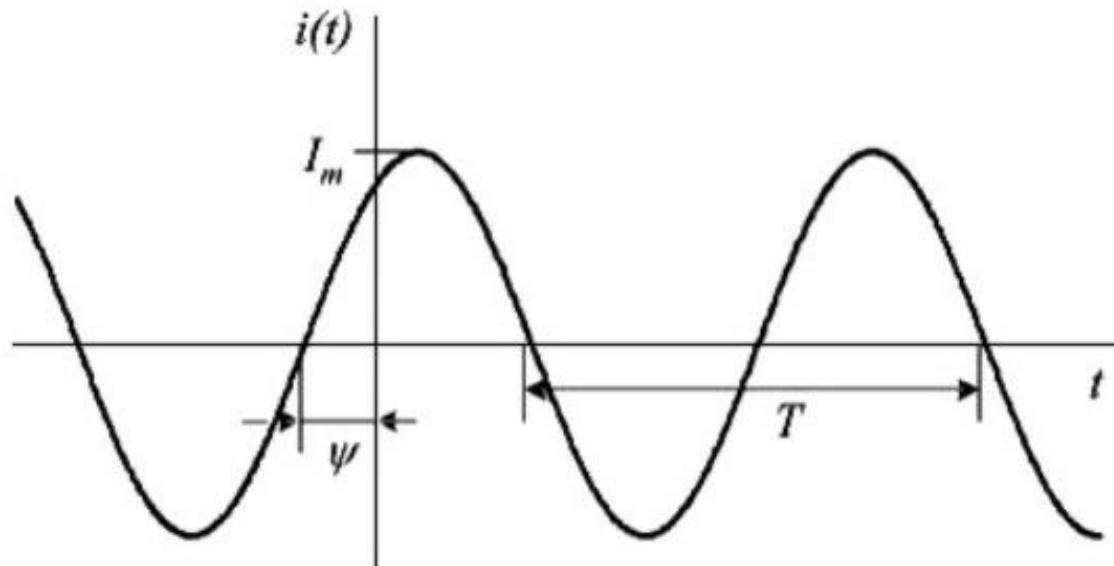


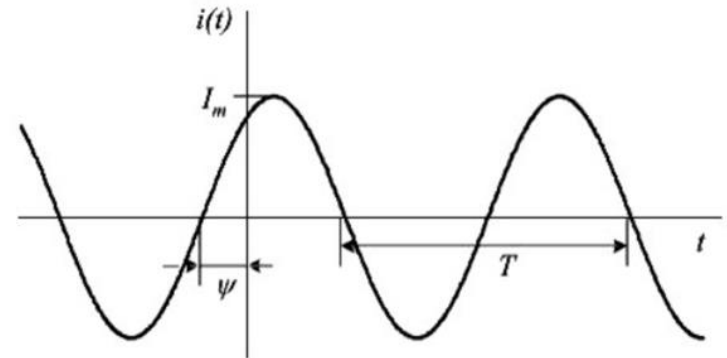
Рис. Зависимость мгновенного значения силы тока от времени

Электрические однофазные цепи синусоидального тока

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \Psi_i),$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \Psi_u),$$

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \Psi_e).$$



Амплитуда колебаний (обозначается I_m , U_m , E_m) – это максимальное отклонение переменного тока (напряжения или ЭДС) от своего среднего значения (т.е. половина размаха физической величины).

Колебания, в которых колеблющаяся величина (например, сила тока в электрической цепи) изменяется во времени по синусоидальному или косинусоидальному закону, называют **гармоническими**.

Период T – это промежуток времени, по истечении которого синусоидальный ток (напряжение, ЭДС) принимает одно и то же мгновенное значение, $[T] = 1 \text{ с}$.

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = I_m \sin(\omega(t + nT) + \psi_i)$$

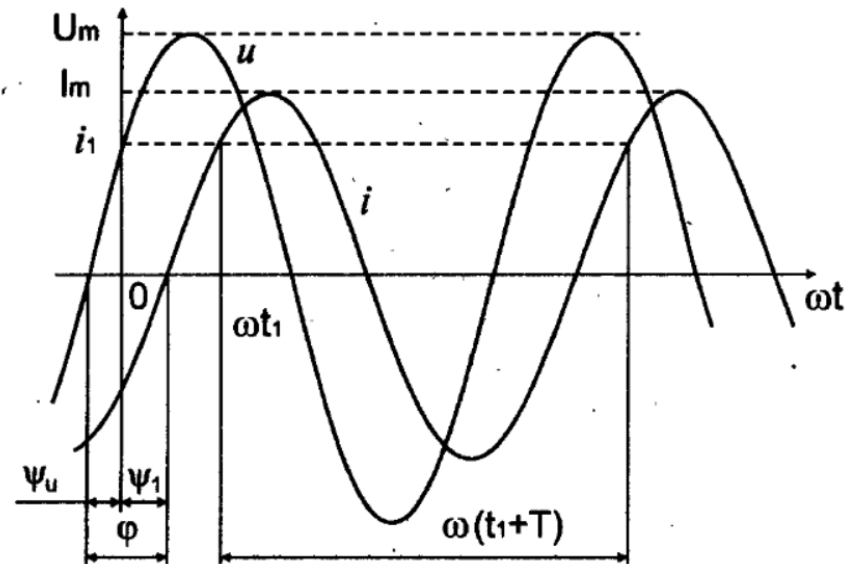
Частота $f = 1/T$ – это число полных изменений периодической величины (т.е. количество периодов) в течение одной секунды, $[f] = 1 \text{ Гц}$.

Электрические однофазные цепи синусоидального тока

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \Psi_i),$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \Psi_u),$$

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \Psi_e).$$



Фаза (фазовый угол) – это аргумент синусоидальной величины, например, для тока $\alpha_i = \omega t + \psi_i$, $[\alpha] = 1$ рад.

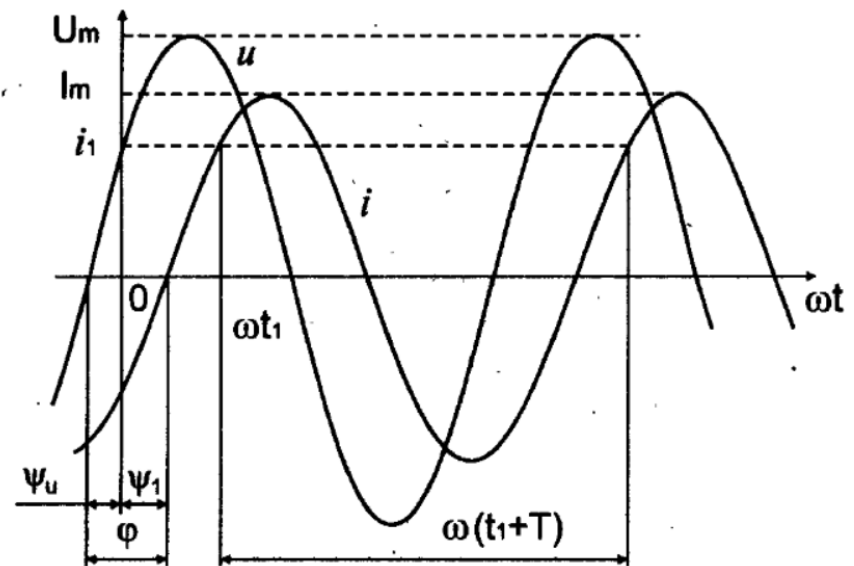
Начальная фаза ψ – значение фазы в момент времени $t = 0$, $[\psi] = 1$ рад. Начальная фаза считается положительной, если в момент времени $t = 0$ мгновенное значение синусоидальной величины положительно, и, наоборот, отрицательной, если в момент времени $t = 0$ мгновенное значение синусоидальной величины отрицательно.

Электрические однофазные цепи синусоидального тока

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \Psi_i),$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \Psi_u),$$

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \Psi_e).$$



Фаза (фазовый угол) – это аргумент синусоидальной величины, например, для тока $\alpha_i = \omega t + \psi_i$, $[\alpha] = 1$ рад.

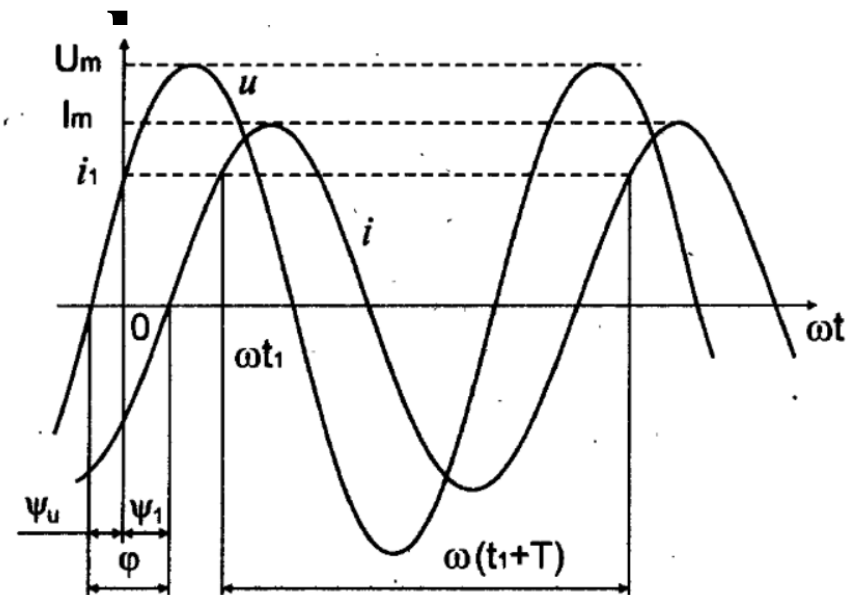
Начальная фаза ψ – значение фазы в момент времени $t = 0$, $[\psi] = 1$ рад. Начальная фаза считается положительной, если в момент времени $t = 0$ мгновенное значение синусоидальной величины положительно, и, наоборот, отрицательной, если в момент времени $t = 0$ мгновенное значение синусоидальной величины отрицательно. На временных диаграммах положительную начальную фазу откладывают влево ($\psi_u > 0$), а отрицательную – вправо ($\psi_i < 0$) от начала координат.

Электрические од синусоидаль

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \Psi_i),$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \Psi_u),$$

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \Psi_e).$$



Угловая частота $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ – это скорость изменения фазы (фазового угла), $[\omega] = 1$ рад/с.

Сдвиг фаз – это разность фаз двух синусоидальных величин.

Сдвиг фаз между напряжением и током:

$$\varphi = (\omega t + \psi_u) - (\omega t + \psi_i) = \psi_u - \psi_i.$$

Возможны следующие варианты:

- а) $\varphi = 0$ – в этом случае ток и напряжение совпадают по фазе (на R);
- б) $\varphi = \pm\pi$ – в этом случае ток и напряжение находятся в противофазе;
- в) $\varphi > 0$ – в этом случае ток отстает по фазе от напряжения на угол φ (т.е. ток достигает амплитудного значения позднее напряжения) (на L);
- г) $\varphi < 0$ – в этом случае напряжение отстает по фазе от тока (на C).

Электрические однофазные цепи синусоидального тока

Часто для характеристики тока или напряжения используют понятие действующего значения. Действующим значением силы переменного тока называют величину постоянного тока, действие которого произведёт такую же работу, что и рассматриваемый переменный ток за время одного периода. Его величину находят как среднеквадратическое значение за период. Например, для силы тока:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt} .$$

При синусоидальной зависимости от времени действующее значение оказывается в $\sqrt{2}$ раз меньше амплитудного

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m \sin(\omega t + \psi_i) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} .$$

Электрические однофазные цепи синусоидального тока

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}, \quad U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}, \quad E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2(t) dt}.$$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}.$$

$$I_{cp} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} i(t) dt, \quad U_{cp} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} u(t) dt, \quad E_{cp} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} e(t) dt.$$

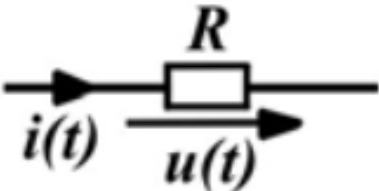
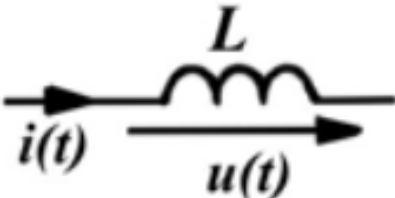
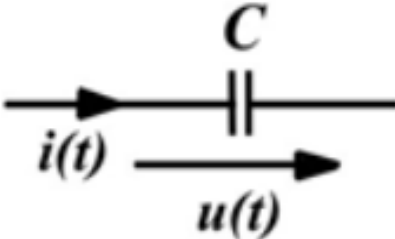
$$I_{cp} = \frac{2}{\pi} I_m, \quad U_{cp} = \frac{2}{\pi} U_m, \quad E_{cp} = \frac{2}{\pi} E_m.$$

Коэффициент формы кривой – это отношение действующего значения переменной величины к ее среднему значению. Он используется при описании зависимости тока или напряжения от времени, и показывает насколько сильно отличается форма сигнала переменного тока от постоянного тока той же средней мощности. Для синусоидальных токов, напряжений и ЭДС коэффициент формы кривой равен:

$$k_f = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11.$$

Электрические однофазные цепи синусоидального тока

Мгновенные значения силы тока и напряжения для пассивных элементов R , L и C электрических цепей синусоидального тока связаны между собой следующим образом (см. табл.).

		
$u(t) = R \cdot i(t),$ $i(t) = \frac{u(t)}{R}$	$u(t) = L \frac{di(t)}{dt},$ $i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(t) dt + i(0)$	$u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + u(0),$ $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$

Синусоидальный ток в сопротивлении

$$u_R(t) = U_m \sin(\omega t + \Psi_u),$$

$$i_R(t) = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \Psi_u) = I_m \sin(\omega t + \Psi_i).$$

$$I_m = \frac{U_m}{R}, \Psi_u = \Psi_i, \varphi = 0.$$

Синусоидальный ток в индуктивности

$$i_L(t) = I_m \sin(\omega t + \Psi_i).$$

$$\begin{aligned} u_L(t) &= L \frac{di(t)}{dt} = \omega L I_m \cos(\omega t + \Psi_i) = \\ &= X_L I_m \sin\left(\omega t + \Psi_i + \frac{\pi}{2}\right) = U_m \sin(\omega t + \Psi_u), \end{aligned}$$

$$U_m = I_m X_L, \quad X_L = \omega L, \quad \Psi_u = \Psi_i + \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Синусоидальный ток в ёмкости

$$u_C(t) = U_m \sin(\omega t + \Psi_u),$$

$$i_C(t) = C \frac{du(t)}{dt} = \omega C U_m \cos(\omega t + \Psi_u) =$$

$$= \frac{U_m}{X_C} \sin(\omega t + \Psi_u + \frac{\pi}{2}) = I_m \sin(\omega t + \Psi_i).$$

$$I_m = \frac{U_m}{X_C}, \quad X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad \Psi_i = \Psi_u + \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

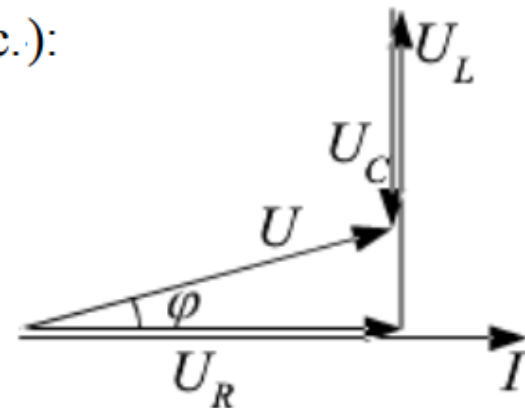
Электрические однофазные цепи синусоидального тока

Для решения несложных задач используются векторные диаграммы токов и напряжений. На них токи и напряжения представляются в виде векторов, длина которых равна действующему значению, а направление определяется начальной фазой. Векторы напряжений или токов можно складывать и вычитать.

Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из последовательно соединенных R , L и C элементов. Пусть напряжение источника изменяется по синусоидальному закону. Найдем мгновенные значения силы тока в цепи и напряжений на элементах, если известны частота и амплитуда напряжения источника.

Поскольку элементы R , L и C соединены последовательно, то через них протекает один и тот же ток. Поэтому за ноль фазы удобно принять фазу силы тока, тогда мгновенное значение напряжения источника будет изменяться по закону $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$, а векторная диаграмма тока и напряжений будет иметь следующий вид (см. рис.):

Рис. Векторная диаграмма тока и напряжений



Электрические однофазные цепи синусоидального тока

Полное сопротивление электрической цепи, состоящей из последовательно соединенных R , L и C элементов, будет равно:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2},$$

где $X_L = \omega L$ – реактивное индуктивное сопротивление;

$X_C = \frac{1}{\omega C}$ – реактивное емкостное сопротивление.

Действующее значение напряжения источника находится через значение его амплитуды $U = U_m / \sqrt{2}$. Отсюда можно найти и действующее значение силы тока $I = U / Z$. Далее находятся действующие значения напряжений на элементах: $U_L = \omega LI$, $U_C = \frac{I}{\omega C}$ и $U_R = RI$.

Если известны частота и параметры элементов схемы R , L и C , то можно найти сдвиг фаз между током и напряжением источника:

$$\varphi = \arctg \left(\frac{X_L - X_C}{R} \right).$$

Электрические однофазные цепи синусоидального тока

Таким образом, исходя из вышеуказанных соображений, можно записать выражения для мгновенных значений силы тока и напряжений на элементах цепи:

$$i(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t), \quad u_R(t) = U_R\sqrt{2} \sin(\omega t),$$
$$u_L(t) = U_L\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad u_C(t) = U_C\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Синусоидальные функции хоть и очень просты, но их графическое изображение и операции с ними трудоемки и недостаточно точны. Существенного упрощения можно достичь, если перейти к комплексной форме записи.

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \quad \rightarrow \quad \dot{u} = U_m e^{j(\omega t + \psi_u)} = \dot{U}_m e^{j\omega t}.$$

$$u \rightarrow \dot{U}_m e^{j\omega t}, \quad i \rightarrow \dot{I}_m e^{j\omega t}, \quad e \rightarrow \dot{E}_m e^{j\omega t}.$$

Представление синусоидальных величин в комплексном виде

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \rightarrow \dot{u} = U_m e^{j(\omega t + \psi_u)} = \dot{U}_m e^{j\omega t}.$$

$$u \rightarrow \dot{U}_m e^{j\omega t}, \quad i \rightarrow \dot{I}_m e^{j\omega t}, \quad e \rightarrow \dot{E}_m e^{j\omega t}.$$

$$u(t) = \operatorname{Im}(U_m e^{j(\omega t + \psi_u)}) = U_m \sin(\omega t + \psi_u),$$

$$u(t) = \operatorname{Re}(U_m e^{j(\omega t + \psi_u)}) = U_m \cos(\omega t + \psi_u).$$

$$\dot{U}_m = U_m e^{j\psi_u} \quad - \text{ комплексная амплитуда напряжения}$$

$$\dot{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_u} = U e^{j\psi_u} \quad - \text{ комплексное действующее напряжение}$$

Показательная, тригонометрическая и алгебраическая

формы записи комплексного действующего напряжения:

$$\dot{U} = U e^{j\psi_u} = U \cos \psi_u + j U \sin \psi_u = U_a + j U_p,$$

где U_a — активная составляющая напряжения,

U_p — реактивная составляющая напряжения.

Для перехода из алгебраической формы комплексного числа в показательную и обратно можно воспользоваться следующими формулами:

$$\dot{U} = U_a + j U_p = \sqrt{U_a^2 + U_p^2} e^{j \operatorname{arctg} \frac{U_p}{U_a}} = U e^{j\psi_u},$$

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2}, \quad \psi_u = \operatorname{arctg} \frac{U_p}{U_a}.$$

Представление синусоидальных величин в комплексном виде

Применение комплексной формы записи напряжений токов и ЭДС позволяет дифференцирование и интегрирование свести к умножению или делению комплексного числа на оператор поворота $j\omega = \omega e^{j\pi/2}$.

$$\frac{d\dot{u}}{dt} = \frac{d}{dt} U_m e^{j(\omega t + \psi_u)} = j\omega U_m e^{j(\omega t + \psi_u)},$$

$$\int \dot{u} dt = \int U_m e^{j(\omega t + \psi_u)} dt = U_m \frac{e^{j(\omega t + \psi_u)}}{j\omega}.$$

Электрические цепи синусоидального тока

Закон Ома в комплексной форме:

$$\dot{U}_m = \dot{Z} \dot{I}_m, \quad \dot{U}_m = \dot{Y} \dot{U}_m \quad \text{или} \quad \dot{U} = \dot{Z} \dot{I}, \quad \dot{U} = \dot{Y} \dot{U}.$$

Используя закон Ома в комплексной форме каждому участку цепи можно поставить в соответствие комплексную схему замещения. В этой схеме участок цепи представлен комплексным сопротивлением или комплексной проводимостью, а токи и напряжения на его зажимах — комплексными амплитудами или комплексными действующими значениями.

Первый закон Кирхгофа:

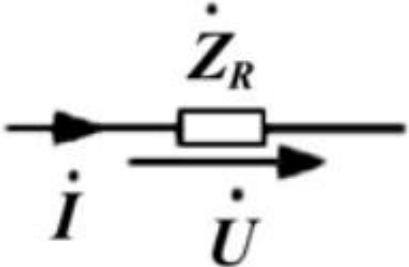
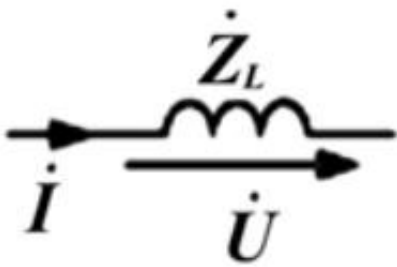
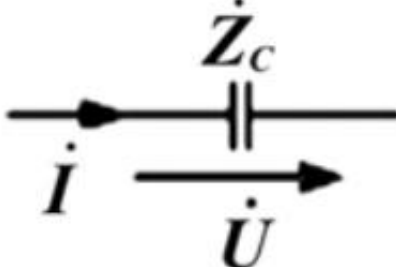
$$\sum_k \pm \dot{I}_{mk} = 0 \quad \text{или} \quad \sum_k \pm \dot{I}_k = 0.$$

Второй закон Кирхгофа:

$$\sum_k \pm \dot{Z}_k \dot{I}_{mk} = \sum_k \pm \dot{U}_{mk} = \sum_n \pm \dot{E}_{mn} \quad \text{или} \quad \sum_k \pm \dot{Z}_k \dot{I}_k = \sum_k \pm \dot{U}_k = \sum_n \pm \dot{E}_n.$$

Электрические цепи синусоидального тока

В табл. представлены комплексные значения сопротивлений R , L и C элементов.

		
$\dot{Z}_R = R = R \cdot e^{j0}$	$\dot{Z}_L = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}}$	$\dot{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}$

Если на участке электрической цепи из последовательно соединенных R , L и C элементов действует источник синусоидального напряжения, то комплексное сопротивление этого участка будет равно сумме комплексных сопротивлений элементов $\dot{Z} = \dot{Z}_R + \dot{Z}_L + \dot{Z}_C$. Подставляя их значения (см. табл.), получим

$$\dot{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Построение векторных диаграмм

В основном векторные диаграммы строятся на комплексной плоскости и бывают двух типов:

- **векторные диаграммы токов и напряжений;**
- **векторные топографические диаграммы напряжений.**

Все векторные диаграммы строятся в масштабе, как для токов, так и для напряжений. На комплексной плоскости обозначаются оси координат $+1$ и $+j$. Методика построения диаграмм зависит от схемы соединения электрической цепи. Если элементы цепи R , L , C соединены **последовательно**, то «опорным» в диаграмме является **вектор тока**, как общий для всех элементов. Далее строятся векторы напряжений с учетом сдвига фаз между током и напряжениями на элементах (см. диаграмму А). Геометрическая сумма векторов напряжений должна быть равна вектору напряжения, приложенному к электрической цепи.

Построение векторных диаграмм

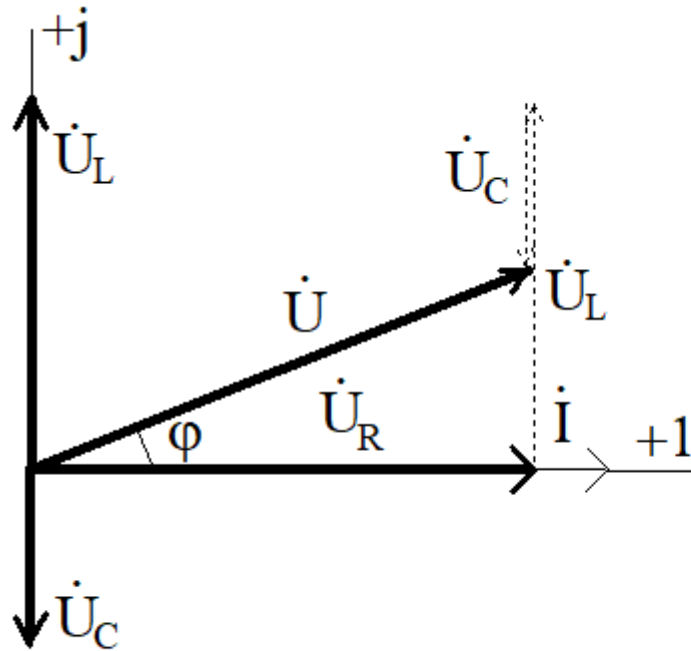


Диаграмма А

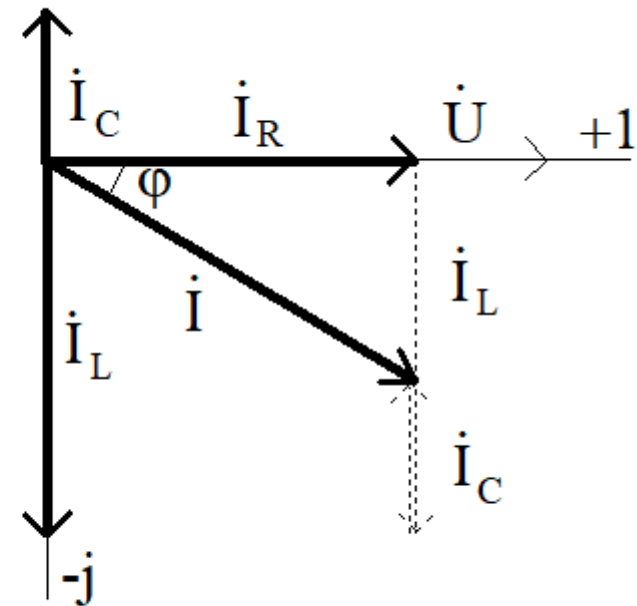


Диаграмма Б

Если элементы цепи R , L , C соединены **параллельно**, то «опорным» в диаграмме является **вектор напряжения**, как общий для всех элементов. Далее строятся векторы токов с учетом сдвига фаз между напряжением и токами в ветвях цепи (см. диаграмму Б). Геометрическая сумма векторов токов в ветвях должна быть равна общему току в электрической цепи.

Построение векторных диаграмм

Топографическая диаграмма напряжений представляет собой диаграмму комплексных потенциалов точек электрической цепи, отложенных в определенном порядке.

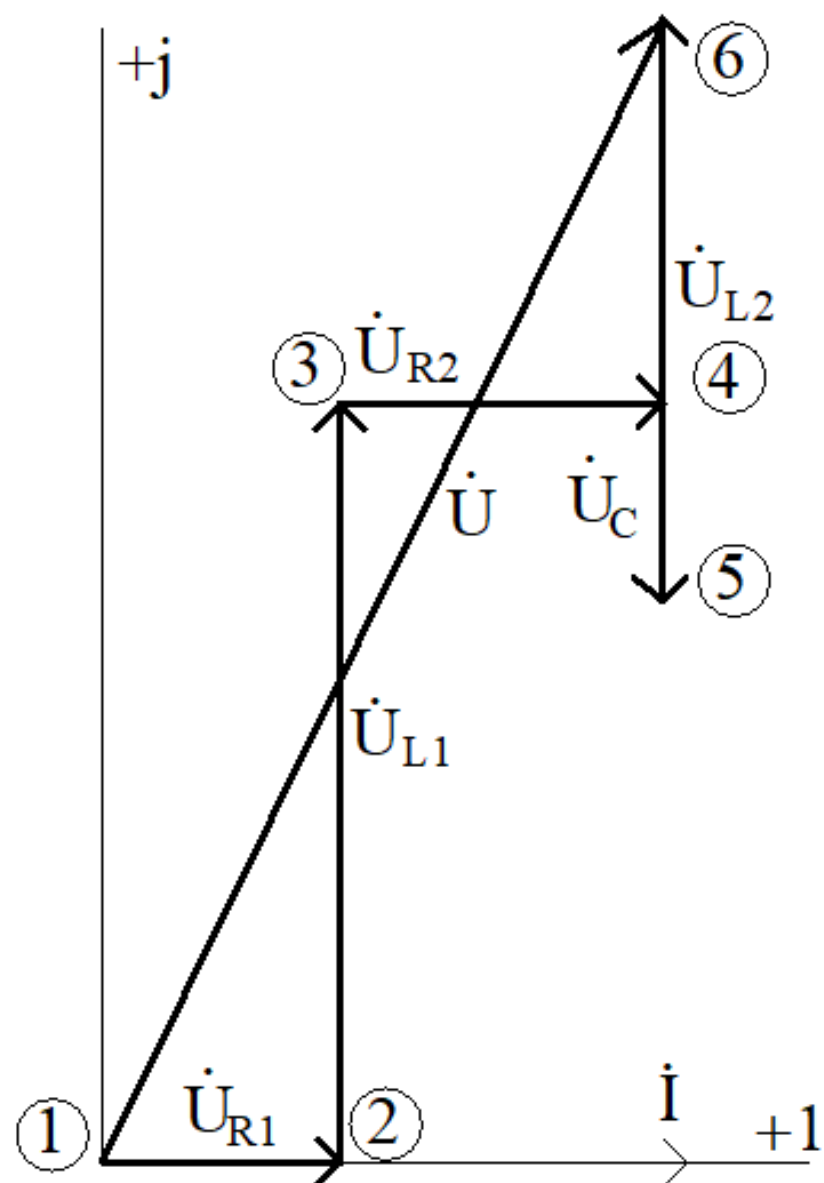
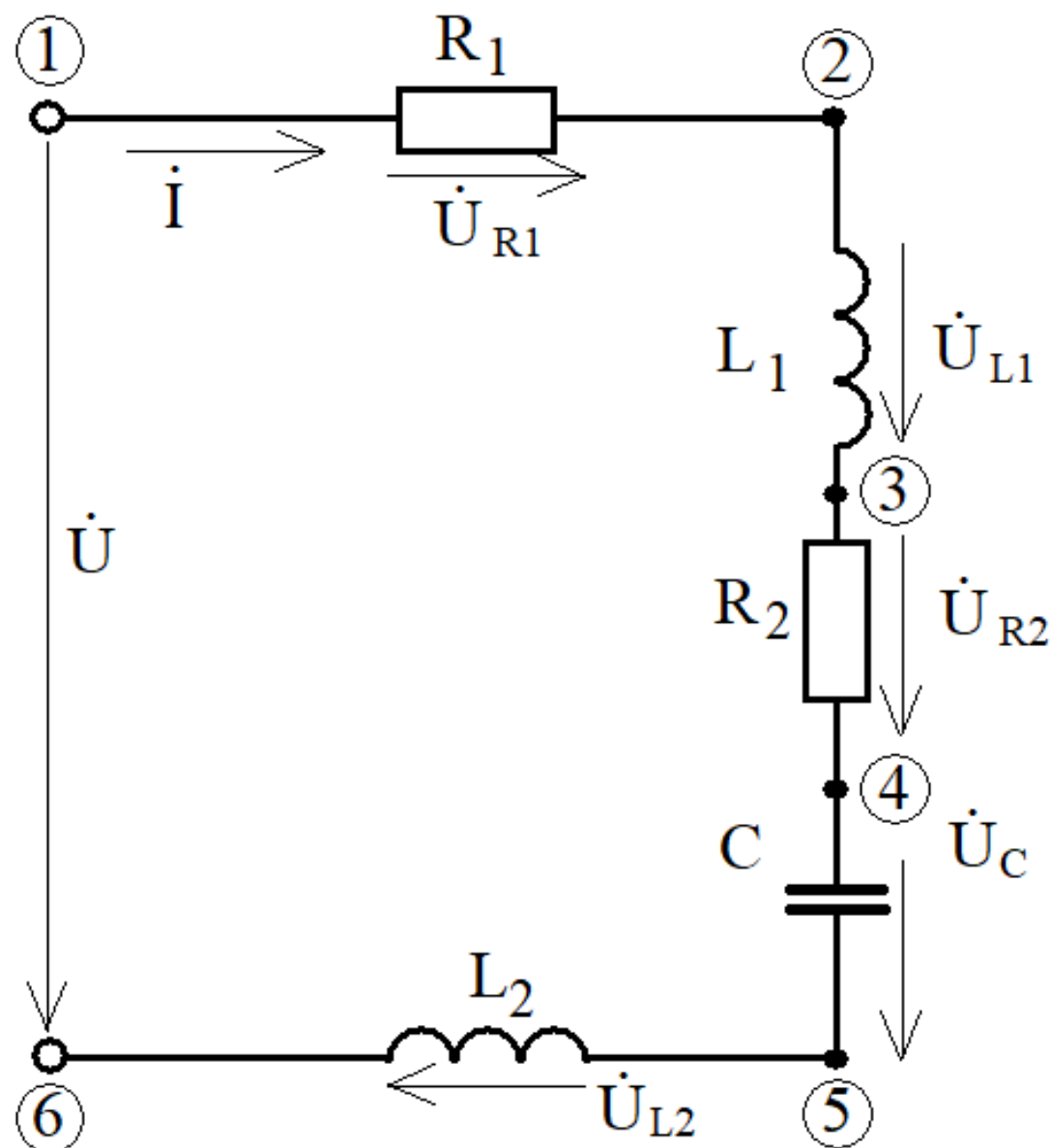
Потенциал одной из точек принимается равным нулю и далее возможны два варианта построения:

- **первый** – относительно этого потенциала рассчитываются потенциалы остальных точек;
- **второй** – от этой точки откладываются модули напряжений на элементах с соответствующими углами сдвига фаз.

Порядок построения топографической диаграммы виден на простом примере (см. схему В и диаграмму В).

В электрических цепях со смешанным соединением элементов топографическая диаграмма напряжений обычно строится в несколько этапов. При этом сначала строятся диаграммы для отдельных ветвей цепи, что предполагает наличие векторной диаграммы токов для всей цепи, а потом объединяются в общую топографическую диаграмму.

Построение векторных диаграмм



АКТИВНАЯ МОЩНОСТИ

Активной мощностью называется средняя мощность за период:

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} p(\tau) d\tau, \quad p(t) = u(t) \cdot i(t), \quad u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_u), \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i),$$
$$P = \frac{1}{T} \int_0^T U_m I_m \cos(\omega \tau + \psi_u) \cos(\omega \tau + \psi_i) d\tau =$$
$$= \frac{U_m I_m}{2T} \left(\int_0^T \cos(\psi_u - \psi_i) d\tau + \int_0^T \cos(2\omega \tau + \psi_u + \psi_i) d\tau \right) =$$
$$= \frac{U_m I_m}{2} \cos(\psi_u - \psi_i) = U \cdot I \cdot \cos \varphi.$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi, \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = \psi_u - \psi_i, \quad \cos \varphi - \text{коэффициент мощности.}$$

Активная мощность характеризует интенсивность потерь энергии в электрической цепи (интенсивность преобразования электрической энергии в другие виды энергии), она связана только с наличием активных сопротивлений.

При $\varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$, поэтому для сопротивления R активная мощность максимальна.

При $\varphi = \pi/2$, $\cos \varphi = 0$, $P = 0$ – при установившемся режиме для индуктивности и емкости.

Активная, реактивная, полная и комплексная мощности

Активная мощность: $P = U \cdot I \cdot \cos\varphi = U \cdot I_a = U_a \cdot I = I^2 R = U^2 G$,

где U и I – действующие значения напряжения и тока, φ – сдвиг фаз между напряжением и током; $U_a = U \cdot \cos\varphi$ и $I_a = I \cdot \cos\varphi$ – активные составляющие напряжения и тока соответственно; R – активное сопротивление; G – активная проводимость.

Активная мощность характеризует интенсивность необратимого преобразования электрической энергии в другие виды энергии. $[P] = 1 \text{ Вт (ватт)}$.

Реактивная мощность: $Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi = U \cdot I_p = U_p \cdot I = I^2 X = U^2 B$,

где $U_p = U \cdot \sin\varphi$ и $I_p = I \cdot \sin\varphi$ – реактивные составляющие напряжения и тока соответственно; X – реактивное сопротивление; B – реактивная проводимость.

Реактивная мощность характеризует интенсивность колебательного обмена энергией между источником и реактивными элементами приемника электрической энергии без ее преобразования. $[Q] = 1 \text{ В} \cdot \text{Ар (вольт-ампер реактивный)}$.

Полная мощность: $S = U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2} = I^2 Z = U^2 Y$.

Полная мощность – это наибольшее значение активной мощности, которое может быть получено при заданных значениях напряжения и тока. $[S] = 1 \text{ В} \cdot \text{А (вольт-ампер)}$.

Коэффициент мощности: $\cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{UI} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{Q}{P}\right)^2}}$.

Активная, реактивная, полная и комплексная мощности

Комплекс полной мощности электрической цепи синусоидального тока определяется произведением комплексного действующего значения напряжения и сопряженного комплексного действующего значения тока

$$\dot{S} = \dot{U} \cdot \dot{I}^* = UIe^{\pm j\varphi} = UI \cos(\pm\varphi) + jUI \sin(\pm\varphi) = P \pm jQ .$$

То есть вещественная часть комплекса полной мощности – это активная мощность P , а коэффициент при мнимой единице – реактивная мощность Q . Полная мощность цепи учитывает активную и реактивную мощности $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = UI$.

Активная мощность всегда положительна, она характеризует необратимое преобразование электрической энергии в другой вид энергии, например, в тепловую, световую и механическую. Реактивная мощность расходуется на создание магнитного поля в индуктивности или электрического поля в емкости. Реактивная мощность в цепи, имеющей индуктивный характер, – положительна, а в цепи с емкостным характером – отрицательна. Энергия, накопленная в емкости или в индуктивности, периодически возвращается в электрическую цепь. Полная мощность характеризует предельные возможности источника энергии.