

Д.В. Прохоренко

*Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
г. Омск*

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЖИДКОСТИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА SPH

При изучении естественных течений возникает необходимость в моделировании, которое сможет предсказать как течение и окружающие тела воздействуют друг на друга. Моделирование жидкости связано с решением нелинейных дифференциальных уравнений, которые в общем случае не имеют аналитического решения. Для нахождения решения, используются численные методы. Одним из таких методов является метод SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) или же гидродинамика сглаженных частиц.

1. Гидродинамика сглаженных частиц. Впервые метод SPH был представлен в работе [1] для решения астрофизических задач. Метод работает путем деления жидкости на дискретные элементы, называемые частицами. Частицы имеют пространственное расстояние («длина сглаживания»), на котором их свойства «сглаживаются» функцией ядра. Любая физическая величина частицы может быть получена путем суммирования соответствующих величин всех частиц, которые находятся в пределах двух сглаженных длин.

Значение физической величины A в точке r задается формулой:

$$A(\mathbf{r}) = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h), \quad (1)$$

где m_j – масса частицы, ρ_j – плотность частицы, h – длина сглаживания, r_j – положение j -й частицы, функция W – функция сглаживания или функция ядра.

Функция сглаживания может иметь произвольный вид, но к ней предъявляется пара требований: значение функции должно просто считаться и она должна обладать определенными свойствами [2].

2. Моделирование жидкости с помощью частиц. Движение вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнением Навье-Стокса. Согласно [3] уравнение движения жидкости имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nu \Delta \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}, \quad (2)$$

где \mathbf{v} – скорость жидкости, ν – коэффициент кинематической вязкости, ρ – плотность жидкости, p – давление жидкости, \mathbf{f} – внешние силы, приведенные к единице массы.

Так же согласно [3] симметричные силы давления и вязкости в соответствии с формулой (1) вычисляется следующим образом:

$$\mathbf{f}_i^{\text{дав}} = -\frac{1}{\rho_i} \sum_j m_j \frac{p_i + p_j}{2\rho_j} \nabla W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h), \quad (3)$$

$$\mathbf{f}_i^{\text{вяз}} = \nu \sum_j m_j \frac{\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i}{\rho_j} \Delta W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h) \quad (4)$$

3. Вычисление давления. Существует несколько подходов для вычисления давления. В «классическом» варианте давление вычисляется с помощью уравнения состояния идеального газа:

$$p = k(\rho - \rho_0), \quad (5)$$

где k – коэффициент жесткости (константа, зависящая от температуры), ρ_0 – исходная плотность жидкости.

В методе WCSPH (Weakly Compressible SPH – «слабосжимаемый» SPH) давление вычисляется по формуле:

$$p = \begin{cases} \frac{\rho_0 c_0}{\gamma} \left(\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right), & \rho > \rho_0, \\ 0, & \rho \leq \rho_0, \end{cases} \quad (6)$$

где $\gamma = 7$, c_0 – коэффициент жесткости.

4. Выбор параметров моделирования. Выбор параметров моделирования является одним из важных этапов в построении модели. К параметрам можно отнести не только размер, массу и плотность частиц, но так же и физические характеристики, такие как коэффициенты вязкости и жесткости. Поскольку модели SPH и WCSPH не обеспечивают несжимаемости, то реальные значения коэффициентов могут приводить к не корректному поведению.

Литература

1. *Gingold R.A., Monaghan J.J.* Smoothed particle hydrodynamica – Theory and application to non-spherical stars // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1977. Vol. 181. P. 375–389.
2. *Суравикин А.Ю.* Реализация метода SPH на CUDA для моделирования несжимаемых жидкостей // Наука и образование. 2012. Вып. 7. С. 87–104.
3. *Müller M., Charypar D., Gross M.* Particle-based fluid simulation for interactive applications // Eurographics/SIGGRAPH Symposium on Computer Animation. 2003. P. 154–159.