Математическое и компьютерное моделирование:
материалы III Международной научной конференции
(Омск, 12 ноября 2015 г.). Омск, 2015. С. 67–68. УДК 519.214

А.Г. Гринь

*Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
г. Омск*

НЕРАВЕНСТВО ПЕЛИГРАД ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ СУММ

В работе [1] Магда Пелиград разработала технику, позволившую осуществить серьёзный прорыв в предельных теоремах для сумм слабо зависимых случайных величин. Ядром этой техники является некоторое неравенство для хвостов распределений сумм зависимых величин, из которого следует, что в определённом смысле эти хвосты ведут себя аналогично хвостам распределения максимумов. Из неравенства Пелиград, в частности, выводятся всевозможные оценки для моментов сумм слабо зависимых случайных величин, обобщающие оценки И.А. Ибрагимова из [2], которые являются основой для доказательства центральной предельной теоремы для сумм зависимых величин.

В настоящей заметке предлагается аналог неравенства Пелиград для так называемых обобщенных сумм – специального семейства бинарных операций, включающего в себя и суммы, и максимумы и многое другое. Из этого неравенства выводятся оценки для моментов обобщенных сумм слабо зависимых случайных величин.

Обобщенной суммой $x \oplus y$ будем называть бинарную операцию на $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$, удовлетворяющую условиям $A_1 - A_4$ (условия $(\mathbf{A})$):

A_1. Ассоциативность: $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z,\ x, y, z \in \mathbb{D}$;

A_2. Коммутативность: $x \oplus y = y \oplus x,\ x, y \in \mathbb{D}$;

A_3. $x \oplus 0 = x,\ x \in \mathbb{D}$;

A_4. Равномерная непрерывность: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из $|y| < \delta$ следует $|x \oplus y - x| < \varepsilon,\ \forall x \in \mathbb{D}$;

Этим условим удовлетворют, например, $x \oplus y = x + y,\ \mathbb{D} = \mathbb{R}$, $x \oplus y = \max\{x, y\},\ \mathbb{D} = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty),\ x \oplus y = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$, $p \geq 1,\ \mathbb{D} = \mathbb{R}$, и.т.д.

Если бинарная операция $x \otimes y$ удовлетворяет условиям $(\mathbf{A})$, а $f(x)$ возрастающая выпуклая (вниз) функция такая, что $f(0) = 0$,

© Гринь А.Г., 2015

$f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, то бинарная операция $x \oplus y = f^{-1}(f(x) \otimes f(y))$ также удовлетворяет условиям ($\mathbf{A}$).

Пусть $\{\xi_n\} = \{\xi_n,\ n = 1, 2, ...\}$ — стационарная в узком смысле последовательность и пусть $\mathcal{F}_{\le n}$ и $\mathcal{F}_{\ge n}$ – σ -алгебры, порождённые семействами $\{\xi_i : i \le n\}$ и $\{\xi_i : i \ge n\}$. Говорят, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет *условию равномерно сильного перемешивания (φ-перемешивания)* с коэффициентом перемешивания $\varphi(n)$, если при $n \to \infty$

$$\varphi(n) = \sup\left\{\frac{|\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|}{\mathbf{P}(A)} :\ A \in \mathcal{F}_{\le 0},\, B \in \mathcal{F}_{\ge n}\right\} \to 0.$$

Будем обозначать

$$X_n(b) = \left(\frac{\xi_1}{b}\right) \oplus ... \oplus \left(\frac{\xi_n}{b}\right), \quad X_n = X_n(1).$$

Следующее предложение – это модификация для обобщенных сумм неравенства М. Пелиград (леммы 3.1 из [1]).

Теорема 1. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если

$$\max_{1 \le k \le n} \mathbf{P}\{|X_k(xc_n)| \ge \delta\} + \varphi(m) \le \gamma < 1,\ x > 0,$$

то при любом $a > 0$ $\quad \mathbf{P}\{|X_n(xc_n)| \ge a + 2\varepsilon\} \le$

$$\le \frac{\gamma}{1-\gamma}\mathbf{P}\{|X_n(xc_n)| \ge a\} + \frac{1}{1-\gamma}\mathbf{P}\left\{\max_{1 \le k \le n} |\xi_k| \ge \delta x c_n\right\}.$$

Будем говорить, что выполнено условие A_5 если при любых $x > 0,\ y_i \in \mathbb{D},\ i = 1, ...n,\ n \ge 2$

$$(xy_1) \oplus ... \oplus (xy_n) = x(y_1 \oplus ... \oplus y_n).$$

Теорема 2. Пусть бинарная операция $\oplus$ удовлетворяет условиям $A_1 - A_5$ и пусть $0 < q < p$, $\quad \mathbf{E}|X_n|^p < \infty$. Тогда

$$\mathbf{E}|X_n|^p \le A\,(\mathbf{E}|X_n|^q)^{p/q} + B\,\mathbf{E} \max_{1 \le k \le n} |\xi_k|^p,$$

где A и B не зависят от n.

Теорема 2 обобщает оценки И.А. Ибрагимова [2, теорема 18.2.3].

Литература

1. *Peligrad M.* An invariance principle for φ–mixing sequences // Annals of Probability. 1985. Vol. 13. № 4. P. 1304–1313.

2. *Ибрагимов И.А., Линник Ю.В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.