Математическое и компьютерное моделирование:
материалы III Международной научной конференции
(Омск, 12 ноября 2015 г.). Омск, 2015. С. 83–85. УДК 514.765+512.812.4

М.Н. Подоксёнов

*Витебский государственный университет им. П.М. Машерова,
г. Витебск, Беларусь*

ГОМОТЕТИЧЕСКИЕ АВТОМОРФИЗМЫ ЧЕТЫРЁХМЕРНЫХ АЛГЕБР ЛИ VI ТИПА БИАНКИ

Преобразование алгебры Ли $f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ называется автоморфизмом, если оно сохраняет операцию скобки: $[fX; fY] = f[X; Y]$ $\forall X, Y \in \mathcal{G}$. Пусть в алгебре Ли $\mathcal{G}$ задано евклидово или лоренцево скалярное произведение $\langle , \rangle$. Тогда преобразование $f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ называется подобием (или гомотетией) с коэффициентом e^{μ}, если $\langle fX, fY \rangle = e^{2\mu}\langle X, Y\rangle$ $\forall X, Y \in \mathcal{G}$. В случае $\mu = 0$ преобразование f называется изометрией.

Преобразование, являющееся одновременно подобием и автоморфизмом, будем называть автоподобием. Преобразование, являющееся од-новременно изометрией и автоморфизмом, будем называть автоизометрией. Решение задачи о существовании автоподобий для алгебр Ли связано с решением задачи о существовании гомотетических преобразований для однородных пространств групп Ли, снабжённых левоинвариантной метрикой.

В данной работе рассматриваются разрешимые четырёхмерные алгебры Ли VI типа по классификации Бианки, которые более детально классифицированы на 4 подтипа А.З. Петровым [1]. На них вводится евклидово или лоренцево скалярное произведение сигнатуры $(+, +, +, -)$. Алгебры Ли VI типа содержат трёхмерный коммутативный идеал $\mathcal{L}$. Если выбрать базис $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ так, чтобы $\{E_2, E_3, E_4\} \in \mathcal{L}$, то коммутационные соотношения будут задаваться равенствами

$$[E_i, E_j] = 0,\ [E_1, E_i] = c_i^j E_j,\ i, j = 2, 3, 4.$$

Другими словами, вектор E_1 действует на $\mathcal{L}$ с помощью линейного преобразования $\mathrm{ad}E_1$, которое задаётся матрицей $\mathbf{C} = \left(c_j^i\right)$.

А.З. Петров приводит следующие неизоморфные канонические виды действия $\mathrm{ad}E_1$ (изменена нумерация базисных векторов).

$$\begin{array}{llll}
\mathrm{VI}_1 & [E_1,E_2]=lE_2, & [E_1,E_3]=\varepsilon E_3, & [E_1,E_4]=kE_4;\\
\mathrm{VI}_2 & [E_1,E_2]=lE_2, & [E_1,E_3]=kE_3+E_4, & [E_1,E_4]=-E_3+kE_4;\\
\mathrm{VI}_3 & [E_1,E_2]=\varepsilon E_2, & [E_1,E_3]=kE_3+E_4, & [E_1,E_4]=kE_4;\\
\mathrm{VI}_4 & [E_1,E_2]=\varepsilon E_2, & [E_1,E_3]=kE_3+E_4, & [E_1,E_4]=kE_4+E_2;\\
 & k,l\in\mathbf{R}, & \varepsilon=0,1. &
\end{array}$$

Теорема 1. *Пусть некоммутативная алгебра Ли $\mathcal{G}$ произвольной размерности $n>2$ содержит коммутативный идеал $\mathcal{L}$ коразмерности 1, и пусть на $\mathcal{G}$ задано лоренцево скалярное произведение. Тогда алгебра Ли $\mathcal{G}$ допускает автоподобия, отличные от автоизометрий, только в том случае, когда идеал $\mathcal{L}$ является прямой суммой идеалов размерности 1 и $n-2$, и при этом на $\mathcal{L}$ и на одномерном идеале индуцируется вырожденное скалярное произведение. В случае евклидова скалярного произведения автоподобия не существуют.*

Теорема 2. *Среди четырёхмерных алгебр Ли* VI *типа по классификации А.З.Петрова, автоподобия относительно лоренцевого скалярного произведения допускают алгебры Ли подтипов* VI_1, VI_2, VI_4, *и только они. При этом скалярное произведения задаётся матрицей вида*

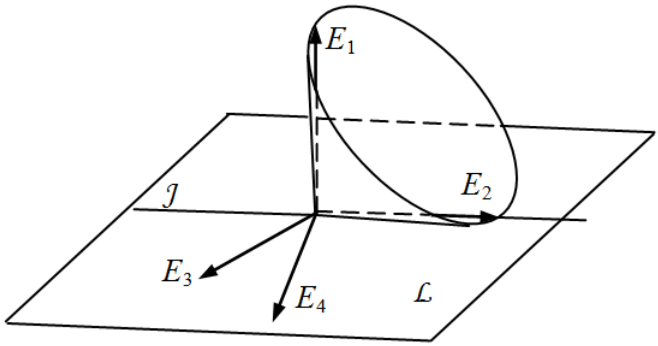
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \mathbf{E} \end{pmatrix},$$

а автоподобия – матрицей вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & e^{2\mu} & \cdots \\ \vdots & \vdots & e^{\mu}\mathbf{S} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{E}$ *– единичная матрица, а* $\mathbf{S}$ *– ортогональная матрица порядка 2.*

Расположение базисных векторов показано на рисунке. Здесь $\mathcal{J}$ – одномерный идеал, а двумерный идеал является линейной оболочкой векторов E_3 и E_4.



Литература

1. *Петров А.З.* Новые методы в общей теории относиельности. М.: Наука, 1966.

2. *Alekseevski D.* Self-similar Lorentzian manifolds // Annals of Global Analysis and Geometry. 1985. Vol. 3. № 1. P. 59–84.