Математическое и компьютерное моделирование:
материалы III Международной научной конференции
(Омск, 12 ноября 2015 г.). Омск, 2015. С. 100–102. УДК 512.57

А.Н. Кабанов

*Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
г. Омск*

ВЕРХНИЙ ЦЕНТРАЛЬНЫЙ РЯД ГРУППЫ УНИТРЕУГОЛЬНЫХ АВТОМОРФИЗМОВ СВОБОДНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ

В статье автора [1] описывалось строение гиперцентральной серии подгруппы унитреугольных автоморфизмов, выделяемой в группе всех автоморфизмов свободной метабелевой алгебры Ли. В статье автора [2] описывалось строение центра аналогичной подгруппы свободной алгебры Ли. В данной работе представлено описание всей гиперцентральной серии.

Пусть L_n – свободная алгебра Ли с множеством свободных порождающих $X_n = \{x_1, ..., x_n\}$. Определим левонормированный коммутатор $[x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}]$, полагая при $k > 1$

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}] = [[...[x_{i_1}, x_{i_2}], ...], x_{i_k}].$$

При $k = 1$ имеем $[x_{i_1}] = x_{i_1}$. Более того, полагаем

$$[x_{i_1}, \underbrace{x_{i_2}, ..., x_{i_2}}_{m}] = [x_{i_1}, x_{i_2}^m].$$

В дальнейшем будем рассматривать только элементы с левонормированной расстановкой скобок.

Выделим в группе $Aut\ L_n$ всех автоморфизмов алгебры L_n подгруппу U_n, порожденную автоморфизмами вида:

$$\tau_i(y_i): \quad \begin{cases} x_i \to x_i + y_i, \\ x_j \to x_j,\ j \neq i, \end{cases}$$

где y_i принадлежит подалгебре, порожденной $x_{i+1}, ..., x_n$. Такая подгруппа называется *группой унитреугольных автоморфизмов* алгебры L_n.

Для краткости будем записывать произвольный автоморфизм φ алгебры L_n с множеством свободных порождающих X_n как $\varphi = (f_1, f_2, ..., f_n)$, где $\varphi(x_i) = f_i$, $i = 1, ..., n$.

Произвольное отображение вида:

$$\varphi = (x_1 + f_1(x_2, ..., x_n), ..., x_i + f_i(x_{i+1}, ..., x_n), ..., x_n) \qquad (1)$$

где для любого i многочлен $f_i(x_{i+1}, ..., x_n) \in L_n$, определяет автоморфизм из U_n. Группа U_n состоит из всех таких автоморфизмов.

Будем считать, что на X_n определена линейная упорядоченность: $x_1 < x_2 < ... < x_n$. Пусть одночлен $h \in L_n$ имеет вид

$$h = [x_{n-s}, x_{n-t}, x_{n-s}^{p_{n-s}}, x_{n-s+1}^{p_{n-s+1}}, ..., x_n^{p_n}], \qquad (2)$$

где $x_{n-s} < x_{n-t}$, $x_{n-s} \leq x_{n-s+1} \leq ... \leq x_n$, $p_{n-s}, ..., p_n \in \mathbb{Z}$, $p_{n-s}, ..., p_n \geq 0$. Введем на алгебре L_n функцию $\mu : L_n \to \mathbb{Z}$, полагая $\mu(h) = s$. Известно (например, [1]), что любой многочлен $f \in L_n$ можно представить в виде суммы или произведения одночленов из L_n в форме 2. В этом случае будем говорить, что многочлен f записан через порождающие одночлены. Если $f = g_1 g_2 \in L_n$, где $\mu(g_1) = \mu_1, \mu(g_2) = \mu_2$, то $\mu(f) = max(\mu_1, \mu_2)$. В случае $f = g_1 + g_2 \in L_n$ также $\mu(f) = max(\mu_1, \mu_2)$.

Кроме того, введем функцию $\lambda : M_n \to \mathbb{Z}$, положив для одночлена указанного вида $\lambda(h) = s + t + s(p_{n-s}) + ... + p_{n-1}$. Аналогично λ-показателем многочлена, записанного через порождающие одночлены, будем называть максимум λ-показателей его порождающих одночленов.

Выделим в группе U_n следующие подгруппы:

$$Z_1 = \{\varphi = (x_1 + f_1, x_2, ..., x_n) | \mu(f_1) \leq 1,\ \lambda(f_1) \leq 1,\ \mu(l(f_1)) = 0\},$$

$$Z_\alpha = \{\varphi = (x_1 + f_1, x_2, ..., x_n) | \mu(f_1) \leq 1,\ \lambda(f_1) \leq \alpha\}, \quad 1 < \alpha < \omega,$$

$$Z_\omega = \{\varphi = (x_1 + f_1, x_2, ..., x_n) | \mu(f_1) \leq 1\},$$

$$Z_{(k-1)\omega} = \{\varphi = (x_1 + f_1, ..., x_{k-1} + f_{k-1}, x_k, ..., x_n) | \mu(f_i) \leq k - i,$$
$$l(f_j) = 0,\ 1 \leq i \leq k-1, j > 1\}, \quad 1 < k \leq n-2,$$

$$Z_{(k-1)\omega+\alpha} = \{\varphi = (x_1 + f_1, ..., x_k + f_k, x_{k+1}, ..., x_n) | \mu(f_i) \leq k - i + 1,$$
$$\lambda_{k-i+1}(f_i) \leq k-i+\alpha,\ l(f_j) = 0,\ 1 \leq i \leq k-1,\ j > 1\}, \quad 1 < k \leq n-2,$$

$$Z_{(n-2)\omega} = \{\varphi = (x_1 + f_1, ..., x_{n-2} + f_{n-2}, x_{n-1}, x_n) | l(f_j) = 0,\ j > 1\},$$

$$Z_{(n-2)\omega+\alpha} = \{\varphi = (x_1+f_1, ..., x_{n-2}+f_{n-2}, x_{n-1}, x_n) | \mu(l(f_i)) \leq \alpha+1-i,$$
$$l(f_j) = 0,\ 1 < i < \alpha + 2,\ j \geq \alpha + 2\}, \quad 1 \leq \alpha \leq n - 2,$$

где f_i – произвольные многочлены алгебры L_n от указанных переменных, $l(f)$ – линейная часть многочлена f.

Теорема. При $n \geq 3$ группа унитреугольных автоморфизмов U_n свободной алгебры Ли гиперцентральна длины $(n-2)\omega+n-2$ и члены ее гиперцентрального ряда $\zeta_\alpha(U_n)$ совпадают с подгруппами $Z_\alpha, 1 \leq \alpha \leq (n-2)\omega + n - 2$.

Литература

1. *Кабанов А.Н.* Гиперцентральная структура группы унитреугольных автоморфизмов свободной метабелевой алгебры Ли // Сибирский математический журнал. 2009. Т. 50, № 2. С. 329–333.

2. *Кабанов А.Н.* Центр группы унитреугольных автоморфизмов свободной алгебры Ли // Математические структуры и моделирование. 2014. № 3(31). С. 57–61.