

Гл. I: Элементы теории множеств

(Лит-ра: Богаченко И.Ф. и др. "Эл-ты лог. выск. и теор. мн-в")  
§1. Понятие множества

Опр. (правильнее - понятие) Множество - это любая определенная совокупность предметов или объектов. Объекты (предметы) данной совокупности можно отличить друг от друга и от объектов (предметов) другой совокупности.

Понятие множества стало не первично, как понятие точки, числа, информации.

Опр. Элементы - объекты, из которых составлено множество

Опр.  $x$  принадлежит  $A$ , если объект  $x$  является элементом множества  $A$ .

$$x \in A$$

$x$  не принадлежит  $A$  в противном случае

$$x \notin A$$

руко-  
или  
машин-  
но  
напи-  
санное

Опр. Семейство - множество, элементами которого являются множества

Опр. Пустое мн-во - мн-во, которое не содержит элементов

$$\emptyset$$

Опр. Универсум - некоторое универсальное множество, которому принадлежат элементы всех рассматриваемых множеств.

$$U$$

Способы задания множеств  
Чтобы задать множество необходимо указать какие элементы ему принадлежат.

① Перечисление элементов

Пр:  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Этот способ подходит для конечных мн-в т.е. мн-в состоящих из конечного числа элементов.



## ② Характеристический предикат

$$A = \{x \mid P(x)\}$$

т.е.  
(для которых)

некоторые условия:  
если оно выполняется,  
то  $x \in A$ , если  
нет, то  $x \notin A$ .

Пр:  $A = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{N}\}$

$$A = \{x \mid (x - \text{простое}) \text{ и } (100 \leq x \leq 1000)\}$$

Этот способ подходит и для  
бесконечных множеств.

## §2. Сравнение множеств

Опр: Мн-во  $A$  содержится в мн-ве  $B$   
(мн-во  $B$  включает мн-во  $A$ ),  
если каждый элемент  $A$  есть  
элемент  $B$ .

$$A \subseteq B$$

подмножество. — надмножество.

Опр Мн-ва  $A$  и  $B$  равны, если  
 $(A \subseteq B)$  и  $(B \subseteq A)$ .

$$A = B$$

$$A = B := (A \subseteq B) \text{ и } (B \subseteq A)$$

но  
определенно  
(мн-во и мн-во  $\Leftrightarrow$ )

Пр:  $\{1, 2\} = \{2, 1\}$

Опр: Множество  $A$  есть собственное  
подмножество  $B$ , если

$$(A \subseteq B) \text{ и } (A \neq B)$$

$$A \subset B$$

и

$$A \subset B := (A \subseteq B) \text{ и } (A \neq B)$$

Замечание:

$$\forall A:$$

$$A \subseteq A$$

$$\emptyset \subseteq A$$

необязательное  
подмножество

## §3. Операции над множествами

① Объединение

$$A \cup B := \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

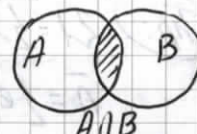


$$\bigcup_{i=1}^n A_i := \{x \mid \exists i \in 1, \dots, n : x \in A_i\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i := \{x \mid \exists i : x \in A_i\}$$

② Пересечение

$$A \cap B := \{x \mid (x \in A) \text{ и } (x \in B)\}$$



$$\bigcap_{i=1}^n A_i := \{x \mid \forall i \in 1, \dots, n : x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i := \{x \mid \forall i : x \in A_i\}$$



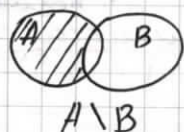
Пр:  $A = \{2, 3, 4, 5\}$   $B = \{3, 4, 5, 6\}$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A \cap B = \{3, 4, 5\}$$

③ Разность

$$A \setminus B := \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$



Пр:  $A \setminus B = \{2\}$

④ Симметрическая разность

$$A \Delta B := \{x \mid ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \notin A) \wedge (x \in B))\}$$

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

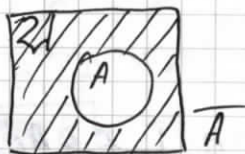


Пр:  $A \Delta B = \{2, 6\}$

⑤ Дополнение

$$\bar{A} := \{x \mid x \notin A\}$$

$$\bar{A} = \mathbb{Z} \setminus A$$



Пр:  $\mathbb{Z} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$   
 $\bar{A} = \{6, 7\}$

Свойства операций над мн-ми  
(законы операций над мн-ми)

① Коммутативный закон

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

② Ассоциативный закон

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

③ Дистрибутивный закон

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

④ Закон идемпотентности

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

⑤ Закон поглощения

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

⑥ Закон де Моргана

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

⑦ Закон двойного отрицания

$$\bar{\bar{A}} = A$$

⑧ Законы пустого и универсального множеств

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cup \bar{A} = \mathbb{Z}$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z} \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cap \mathbb{Z} = A$$

$$\emptyset \cap \mathbb{Z} = \emptyset$$

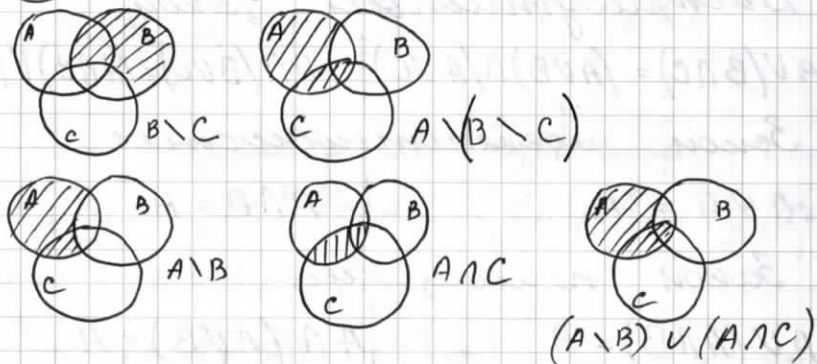


③  $A \setminus B = A \cap \bar{B}$  и др.

Способы доказательства тождеств (в виде чисел и законов)

① Графический — нарисовать диаграммы Эйлера левой и правой частей равенства и убедиться, что они совпадают

Пр:  $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$



② Аналитический — д-ть, что

$$\begin{array}{l} \text{I) } \forall x \in A \quad x \in B \Rightarrow A \subseteq B \\ \text{II) } \forall x \in B \quad x \in A \Rightarrow B \subseteq A \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{I) } \forall x \in A \quad x \in B \Rightarrow A \subseteq B \\ \text{II) } \forall x \in B \quad x \in A \Rightarrow B \subseteq A \end{array}} \right\} A=B$$

Пр:  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

I) Пусть  $x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow$

$x \in A$  либо  $x \in B \cap C$ .

Пусть  $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$  и  $x \in A \cup C$   
(это верно  $\forall B, C$ )  $\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Пусть  $x \in B \cap C$  (в этом сл.  $x \notin A$ )  $\Rightarrow$

$x \in (A \cup B) \cap C \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

II) Пусть  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow$   
 $x \in A \cup B$  и одновременно  $x \in A \cup C$ .

Если  $x \in A \cup B$ , то либо  $x \in A$ ,  
либо  $x \in B$ ; если  $x \in A \cup C$ , то  
либо  $x \in A$ , либо  $x \in C$ .

Пусть  $x \in A$ , тогда  $x \in A \cup (B \cap C)$ .

Пусть  $x \notin A$ , тогда  $x \in B$  и  $x \in C \Rightarrow$   
 $x \in (B \cap C) \Rightarrow x \in (B \cap C) \cup A$ .

③ Аксиоматический — используются уже доказанные тождества

Пр:  $(A \cup B) \cap \bar{B} = A \cap \bar{B}$

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap \bar{B} &= (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{B}) = \\ &= (A \cap \bar{B}) \cup \emptyset = A \cap \bar{B}. \end{aligned}$$

#### §4. Мощность множества

Опр: Мощность множества  
(конечного) — это число его элементов

$|A|$

Св-ва:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + \dots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$

x ∈ A ⇒ x ∈ A ∪ (B ∩ C) и наоборот



Пр.:  $|\emptyset| = 0 \quad |\{\emptyset\}| = 1$

Опр.: Булеан множества  $A$  — это множество всех подмножеств множества  $A$ .

$$\mathcal{P}(A) := \{X \mid X \subseteq A\}$$

Пр.:  $A = \{1, 2, 3\}$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$

Теорема о мощности булеана. Для конечного множества  $A$ :  $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

До-во проведем индукцией по  $|A|$ .

1)  $|A| = 0 \Rightarrow A = \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}(A) = \{\emptyset\} \Rightarrow$

$$|\mathcal{P}(A)| = |\{\emptyset\}| = 1 = 2^0 = 2^{|A|}$$

2) Пусть  $\forall A: |A| < n \quad |\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

Рассмотрим  $A = \{a_1, \dots, a_n\} \Rightarrow$

$$|A| = n. \text{ Пусть } \mathcal{B}_1 = \{X \subseteq \mathcal{P}(A) \mid a_n \in X\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{X \subseteq \mathcal{P}(A) \mid a_n \notin X\}$$

Очевидно, что  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$

*очевидно*  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \mathcal{P}(A)$

$$|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2| = |\mathcal{P}(\{a_1, \dots, a_{n-1}\})| = 2^{n-1}$$

по инд. предп.

И.к.  $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2|$ , то  $|\mathcal{P}(A)| = 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$  ■

Опр.: Мн-ва  $A$  и  $B$  эквивалентны (равномощны), если м-о их элементами м-о установить взаимно однозначное соответствие.

$$A \sim B$$

Пр.:  $A = \{1, 2\} \quad B = \{a, b\}$

$$A \neq B \quad A \sim B$$

Утв. Если  $A, B$  — конечные, то  $A \sim B \Leftrightarrow |A| = |B|$ .

Пр.:  $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$  Эти мн-ва бесконечны;

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots\}$$

на четных местах

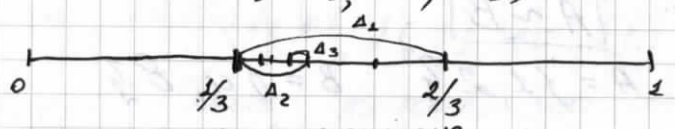
Опр.: Счётное мн-во — мн-во, эквивалентное мн-ву натуральных чисел. (Эт-м м-о переименовать)



Опр. Несчетное мн-во - мн-во, эл-тов, которого нельзя пересчитать.

Теорема Кантора мн-во всех точек отрезка  $[0, 1]$  несчетно

■ От противного. Пусть мн-во точек отрезка  $[0, 1]$  счетно, т.е. это мн-во  $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$



$\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \xrightarrow[\text{по аксиоме Кантора } n \rightarrow \infty]{} (.) x$   
По построению  $x$  принадлежит всем отрезкам  $\Delta_i \Rightarrow x$  не может совпасть ни с одним  $x_i \Rightarrow x \notin [0, 1]$  - противоречие.

Опр. Мн-во мощности континуума - мн-во, эквивалентное мн-ву всех точек отрезка  $[0, 1]$ .

### §5 Покрытие

Пусть  $\mathcal{E} = \{E_i\}_{i \in I}$  семейство, т.е.  $\forall i \in I: E_i \subseteq A$

Опр. Семейство  $\mathcal{E}$  называется покрытием мн-ва  $A$ , если

$$\forall x \in A \exists i \in I \text{ т.е. } x \in E_i.$$

Опр. Разбиение мн-ва  $A$  - это покрытие мн-ва  $A$ , т.е. его элементы попарно не пересекаются:  
 $\forall i, j \in I: i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset.$

Пр.  $A = \{1, 2, 3\}$

$\{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{3, 1\}\}$  - покрытие  $A$  но не разбиение;  
 $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$  - разбиение  $A$ ;  
 $\{\{1\}, \{3\}\}$  - не покрытие  $A$ ;

### §6 Отношения

п.1 Декартово произведение

Упорядоченную пару будем обозн.  $(a, b)$

Пр.  $\{1, 2\} = \{2, 1\}$  - неупор. мн-во  
 $\{1, 2\} \neq \{2, 1\}$  - упор. пара.

Опр. Прямое (декартово) произведение мн-в  $A$  и  $B$  - это мн-во упоряд. пар, в которых 1-й эл-т каждой пары  $\in A$ , а второй  $\in B$ :

$$A \times B := \{(a, b) | (a \in A) \wedge (b \in B)\}$$

не доказанная математика



Опр: Степень мн-ва — его прямое произведение самого на себя:

$$[A]^n := \{(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) \mid a_{i_j} \in A\} = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_n$$

Теорема  
о мощности  
прямого произв.

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

1-й и 2-й упорядоченной паре м-в выбрать  $|A|$  способами, второй —  $|B|$  способами  $\Rightarrow$  всего  $|A| \cdot |B|$  упорядоченных пар

Следствие  $|A^n| = |A|^n$

## п.2 Понятие отношения

Опр Бинарным отношением

$R$  на паре мн-в  $(A, B)$  наз-ая подмножество прямого произведения  $A \times B$ :

$$R \subseteq A \times B$$

инфиксная  
форма  
записи

$$[a R b] := (a, b) \in R$$

постфиксная  
форма  
записи

т.е.  $a$  и  $b$  связаны отношением  $R$

Если  $A = B$ , то  $R$  — отношение на  $A$ .

Пр:  $<, \leq, >, \geq, =, \neq$  — отношения на множестве чисел.

$<$  — мн-во упор. пар  $(a, b)$ , т.е.  $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a < b$ .

2)  $\in$  — отношение принадлежности на паре множеств  $(\mathcal{L}, \mathcal{B}(\mathcal{L}))$ :

$$\in := \{(a, A) \mid a \in \mathcal{L}, A \in \mathcal{B}(\mathcal{L})\}$$

3)  $\subset, \subseteq$  — отношения строгого и нестрогого включения на мн-ве  $\mathcal{B}(\mathcal{L})$ :

$$\subset := \{(A, B) \mid A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{L}), A \text{ содержится в } B\}$$

Опр: Обратное отношение  $[R]^{-1} := \{(a, b) \mid (b, a) \in R\}$

Дополнение отношения  $[R] := \{(a, b) \mid (a, b) \notin R\}$

Тождественное отношение  $[I] := \{(a, a) \mid a \in A\}$

для  
р-отнош.  
на  $A$

## п.3 Свойства отношений?

- 1) Рефлексивность:  $\forall a \in A \ a R a \ (a, a) \in R$
- 2) Антирефлексивность:  $\forall a \in A \ \neg a R a \ (a, a) \notin R$



3) Симметричность:  $\forall a, b \in A : (a R b) \Rightarrow (b R a)$   
или  $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$

4) Антисимметричность:  
 $\forall a, b \in A : (a R b) \wedge (b R a) \Rightarrow a = b$   
или  $((a, b) \in R) \wedge ((b, a) \in R) \Rightarrow (a = b)$

5) Транзитивность:  
 $\forall a, b, c \in A : (a R b) \wedge (b R c) \Rightarrow (a R c)$   
или  $((a, b) \in R) \wedge ((b, c) \in R) \Rightarrow ((a, c) \in R)$

6) Полнота (линейность):  
 $\forall a, b \in A : a \neq b \quad (a R b) \vee (b R a)$   
или  $((a, b) \in R) \vee ((b, a) \in R)$

Далее  
R-отношение  
на A

н 4. Отношение эквивалентности

Опр: Отношение эквивалентности — это рефлексивное, симметричное, транзитивное отношение.  $\equiv$

Пр: 1) равенство чисел  
2) равенство множеств  
3) равномощность множеств  
а эквивалентно 3, если пара  $(a, b)$  принадлежит отношению эквивалентности

Опр: Класс эквивалентности — подмножество  $\Omega$ -3 мн-ва A, попарно эквивалентных.

$$[a] := \{x \in A \mid x \equiv a\}$$

СВ-3а классов экв-ти:

- 1)  $\forall a \in A \quad [a] \neq \emptyset$  (в силу рефл-ти)
  - 2)  $\forall a \equiv b \quad [a] = [b]$  (в силу транзит.)
  - 3)  $\forall a \not\equiv b \quad [a] \cap [b] = \emptyset$  (от противного)
- ||  
V

Теорема Всякое отношение экв-ти на мн-ве A определяет разбиение этого мн-ва, причем  $\Omega$ -мн разбиение являются классы эквивалентности. (обратно также верно)

Пр:  $\{(x, y) \mid \frac{x}{y} \equiv \frac{p}{q}\} = [(x, y)]$  — такой класс экв-ти определяет одно рациональное число.

Самое отношение экв-ти — это отношение равенства на множестве дробей.



## п.5. Отношение порядка

Опр: Отношение порядка - это антисимметричное, транзитивное отношение



Нестрогий порядок  
+ рефлексивно

Строгий порядок  
+ антирефлексивно

Линейный (полный) пор-к  
+ линейное (полное)

Частичный пор-к

Пр: 1) отношения  $<, >$  на  $\mathbb{R}$  - отношения строгого линейного порядка

2) отношения  $\leq, \geq$  на  $\mathbb{R}$  - отношения нестрогого линейного порядка

3) отношение  $\subset$  на  $\mathcal{B}(\mathbb{Z})$  - отношение строгого, частичного порядка

$$A = \{1, 2, 3\}$$

4)  $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,1)\}$  - это отношение нестрогого линейного порядка.

5) Отношение делимости на множестве  $\mathbb{N}$  - это отношение нестрогого, частичного порядка.

## п.6. Функции

Опр: Пусть  $f$  - отношение на паре множеств  $(A, B)$ , т.е.

$\forall a \in A ((a, b) \in f) \wedge (a, c) \in f \Rightarrow (b = c)$ .  
Тогда отношение  $f$  называется функцией из  $A$  в  $B$ .

$$f: A \rightarrow B$$

каноническая форма функции  $f(a) = b \Rightarrow (a, b) \in f$  (или  $a \rightarrow b$ )



отношение, но не функция



сюръекция, но не инъекция



инъекция

$$\left. \begin{aligned} f(a_1) &= b \\ f(a_2) &= b \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_1 = a_2$$

но не сюръекция

$$\forall b \in B \exists a \in A: f(a) = b$$



биекция (сюръекция и инъекция)



## §7 Нечёткие множества

Используется для описания смонных, либо определенных систем, в которых наряду с количественными данными присутствуют неопределенные, субъективные, качественные данные (Лотфи Заде) 1965г.

Опр: Нечёткое подмножество

$A$  множества  $ZL$  - это пара  $(ZL, \mu_A)$ , где  $\mu_A(x) \in [0, 1]$ -функция, интерпретируемая как степень принадлежности элемента  $x \in ZL$  множеству  $A$ .

Обычное чёткое множество  $A$  имеет следующую ф-ю принадлежности:

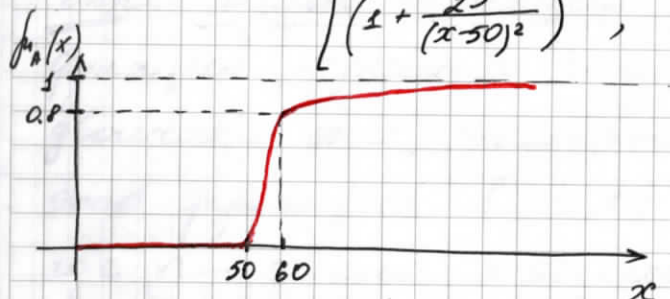
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Пр: 1) Нечёткое мн-во "несколько"

|            |   |     |     |     |   |   |     |     |     |    |     |
|------------|---|-----|-----|-----|---|---|-----|-----|-----|----|-----|
| $x$        | 1 | 2   | 3   | 4   | 5 | 6 | 7   | 8   | 9   | 10 | ... |
| $\mu_A(x)$ | 0 | 0,1 | 0,6 | 0,8 | 1 | 1 | 0,9 | 0,7 | 0,2 | 0  | ... |

2) Нечёткое множество "старый?"

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 50 \\ \left(1 + \frac{25}{(x-50)^2}\right)^{-1}, & x > 50 \end{cases}$$



3) Нечёткие множества "малое", "среднее", "большое" расстояние.

