

## Гл 2.: Элементы булевой алгебры.

(Лит-ра: Яблоцкий С.В. "Введение в ЛМ" Гл.1)  
 Поисков БФ. Давидова О.Т., Райзунин Р.Т. "Проектир. канб. схем".

Опр.: Булева функция (логическая функция; функция алгебры логики, двоичная ф-я, бинарная ф-я) — это функция  $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ , где  $n$  — число переменных (аргументов). БФ

П.о. булева ф-я, как и её аргументы, принимает только два значения: 0 и 1.

Матем. дисциплина, изучающая булевы ф-ции и их свойства называется булевой алгеброй (алгеброй логики).

Для задания БФ достаточно указать, какое значение функции соотв-т каждому набору значений аргументов, т.е. вывести таблицу истинности.

$x_1$	$x_2$	...	$x_n$	$f(x_1, \dots, x_n)$
0	0	...	0	
1	1	...	1	

$\left. \begin{array}{l} 2^n \text{ строк} \end{array} \right\}$



Порядок наборов в таблице истинности соответствует естественному порядку чисел  $0, 1, \dots, 2^n - 1$ .

↓  
 9-ю и 10-ю задать набором значений (транспонированный правый столбец табл. ист.)

Пр:  $f = (00101100)$

$x_1, x_2, x_3, f$
0 0 0 0
0 0 1 0
0 1 0 1
0 1 1 0
1 0 0 1
1 0 1 1
1 1 0 0
1 1 1 0

Теорема Число булевых функций, зависящих от  $n$  переменных равно  $2^{2^n}$ .

■ Число строк в табл. ист. ф-ции от  $n$  переменных равно  $2^n \Rightarrow$  Число таких ф-ций равно числу

различных векторов длины  $2^n$ .  
 Т.к. эти вектора двоичные, то их число равно  $2^{2^n}$ .

§2 БФ двух переменных (элементарные БФ) или логические операции

1 1 1 1	1	const 1
1 1 1 0	$x \vee y$	Истина Шерффера И-НЕ или импликация
1 1 0 1	$x \rightarrow y$	отрицание $x$ И-НЕ обратная имплика.
1 1 0 0	$\bar{x} \rightarrow x$	отрицание $y$ И-НЕ равнозначность
1 0 1 1	$y \rightarrow x$	стрелка Пирса, ИЛИ-НЕ
1 0 0 1	$\bar{y} \rightarrow y$	дизъюнкция, ИЛИ
1 0 0 0	$x \leftrightarrow y, x \wedge y$	множение по модулю 2 тождественный $y$
0 1 1 0	$x \downarrow y$	тождественный $x$
0 1 0 1	$x \vee y$	конъюнкция, И
0 1 0 0	$x \oplus y$	const 0
0 0 1 1	$\bar{x}y, y - x$	
0 0 1 0	$x$	
0 0 0 1	$\bar{x}y, x - y$	
0 0 0 0	$x \cdot y, x \wedge y, x \vee y, xy$	
0 0 0 0	0	
0 1 0 1		
0 0 1 1		

Всего таких функций  $2^{2^2} = 16$ .

Заметим, что ф-ции  $1, 0, x, \bar{x}, y, \bar{y}$  по сути являются функциями 1-й переменной. Например, для ф-ции  $f(x, y) = x$  переменная  $y$  не существует.

БФ двух переменных или логические операции



$$f(0,0) = f(0,1) = 0$$

$$f(1,0) = f(1,1) = 1$$

Опр: Переменная  $x_i$  является несущественной (фиктивной?) для БФ  $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ , если

$\forall$  набора значений  $d_1, \dots, d_{i-1}, d_{i+1}, \dots, d_n$  переменных  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$  имеет место равенство:

$$f(d_1, \dots, d_{i-1}, 1, d_{i+1}, \dots, d_n) = f(d_1, \dots, d_{i-1}, 0, d_{i+1}, \dots, d_n)$$

Опр БФ-ы  $f_1$  и  $f_2$  равны, если совпадают их табл. истинности (с точностью до фиктивных переменных)

### §3 Реализация булевых

#### функций формулами.

Как и в элементарной алгебре, используя элементарные БФ (логические операции) можно строить формулы.

Опр: Пусть  $\Lambda$  - некоторое <sup>индуктивное</sup> множество булевых ф-ц. <sup>определение</sup> База индукции: каждая

функция  $f$  из  $\Lambda$  - формула над  $\Lambda$

<sup>индук</sup> Индуктивный переход: Пусть

$f_i(x_1, \dots, x_m)$  - функция из  $\Lambda$

$A_1, \dots, A_m$  - либо формулы над  $\Lambda$ , либо символы переменных.

Тогда выражение  $f_i(A_1, \dots, A_m)$  - формула над  $\Lambda$ .

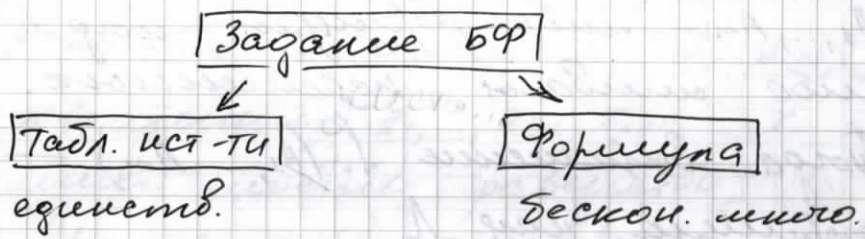
(Пр.)  $\Lambda = \{x \rightarrow y, x \oplus y \oplus z\}$

$\mathcal{Z}_1: (x \oplus y \oplus (x \rightarrow y) \rightarrow z) = f_2(x \oplus y \oplus (x \rightarrow y), z) =$   
 $= f_1(f_2(x, y, x \rightarrow y), z) = f_1(f_2(x, y, f_1(x, y)))$   
 формула над  $\Lambda$ .

Выводы: (1) Каждой формуле  $\mathcal{Z}_1$  можно однозначно сопоставить булеву функцию:  $\mathcal{Z}_1$  реализует  $f$ .  
 (зная таблицу истинности функций из  $\Lambda$ , строится таблица истинности ф-ции, которую реализует ф-ла  $\mathcal{Z}_1$ .)



② Каждую БФ можно задать в виде формулы (суперпозицией других функций).  
 Такое задание не единственно.



Опр. Формулы  $\mathcal{Z}_1$  и  $\mathcal{Z}$  эквивалентны (равносильны), если соответствующие им функции  $f$  и  $g$  равны (т.е. совпадают их табл. ист-ти.)

$$\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}$$

#### §4. Эквивалентные преобразования

При исследовании логических формул во многих случаях требуется всё корректное преобразование, позволяющее получить новую формулу, эквивалентную исходной. Корректность преобразований

обеспечивается выполнением следующих правил, называемых эквивалентными преобразованиями:

① Правило подстановки: если все вхождения переменной  $x$  в исходном высказывании будут одновременно заменены формулой  $\mathcal{Z}_1$ , то высказывание останется верным. проверяется по ТИ

Пр:  $x \rightarrow y \stackrel{?}{=} \bar{x} \vee y$   
 $\mathcal{Z}_1$  это  $x \oplus x$   $y$  заменим на  $\mathcal{Z}_1$   
 $x \rightarrow x \oplus x = \bar{x} \vee x \oplus x$

② Правило замены: Если формула  $\mathcal{Z}_1$ , описывающая функцию  $f$ , содержит  $\mathcal{Z}_1$  в качестве подформулы, то замена  $\mathcal{Z}_1$  на эквивалентную ей формулу  $\mathcal{Z}_2$  не изменит функцию  $f$ .

Пр:  $f = \overbrace{x \oplus (x \rightarrow y)}^{\mathcal{Z}_1} = \overbrace{x \oplus (\bar{x} \vee y)}^{\mathcal{Z}_2}$



Законы булевой алгебры  
(основные эквивалентности)

- ① Коммутативный закон

$$x \vee y = y \vee x$$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

- ② Ассоциативный закон:

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

- ③ Дистрибутивный закон:

$$x \vee (y \cdot z) = (x \vee y) \cdot (x \vee z)$$

$$x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z)$$

- ④ Закон идемпотентности:

$$\mathcal{X} \vee \mathcal{X} = \mathcal{X}$$

$$2^\circ. \mathcal{X} = \mathcal{L}$$

- ⑤ Закон помешения.

$$x \vee x \cdot y = x$$

$$x \cdot (x \vee y) = x$$

- ⑥ Закон де дифузия:

$$\overline{x \vee y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} \vee \overline{y}$$

- ⑦ Закон двойного отрицания

$$\overline{\overline{\mathcal{X}}} = \mathcal{X}$$

- ⑧ Законы 0 и 1:

$$a) X \vee 0 = X$$

5)  $x^0 \cdot 0 = 0$

$$9. x \vee 1 = 1$$

$$e) x \cdot 1 = x$$

g)  $x \vee \bar{x} = 1$

$$c) x \cdot \overline{x} = 0$$

$$uc(\overline{I}) = \emptyset$$

$$3) \overline{0} = 1$$

Закон  
исключающей  
третьей

Закон  
противоречия

- ② Законот склейки

$$x \cdot y \vee x \cdot \bar{y} = x$$

$$(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) = x$$

$$x \vee x \cdot \bar{y} = x \cdot y \vee x \cdot \bar{y} \vee x$$
 - неполная  
схема

- ⑩ Другие полезные экзистенциалисты.

$$x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$$

$$x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y}$$

$$x \vee y = x \oplus y \oplus xy$$

$$x \leftrightarrow y = xy \vee \bar{x}\bar{y} = (x \rightarrow y) \cdot (y \rightarrow x) \text{ и др.}$$

Способы доказательства:

- ① Табличный - построить и сравнить таблицы истинности для левой и правой частей равенства (этот способ также наз. конструктн)

- ② Аксиоматический — исп-ся системы законов (аксиом); все остальные теоремы выводятся из них с исп-м эквивалентных преобразований (правила замены).

Зп-1: 
$$\left. \begin{aligned} x \vee \bar{x}y &= x \vee y \\ x \cdot (\bar{x} \vee y) &= x \cdot y \end{aligned} \right\} \text{м-о отнести к законам поглощения.}$$

$$x \cdot (\bar{x} \vee y) = x \cdot y \quad \text{к законам}$$

м-о отнесту  
к законам  
существования  
человека.

$x$	$y$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$x \vee \bar{x}$	$x \vee \bar{y}$	$\bar{x} \vee y$	$x \cdot (\bar{x} \vee y)$	$xy$
0	0	1	1	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1

соответствует



$$\begin{aligned}
 x \vee \bar{x}y &= x \cdot 1 \vee \bar{x}y = x(y \vee 1) \vee \bar{x}y = \\
 &= xy \vee x \vee \bar{x}y = x \vee y(x \vee \bar{x}) = \\
 &= x \vee y \cdot 1 = x \vee y.
 \end{aligned}$$

Замечание: Не все законы  
независимы друг от друга.  
Например:

3-й закон  
выводится из законов  
единицы и дистрибутивности.

В качестве независимой системы  
законов можно выбрать:

- коммутативность
- ассоциативность
- дистрибутивность
- 0 и 1 (или 1 и 0)

### §5. Разложение БФ-цмф по переменным. СДНФ.

? Пусть  $L$ -мн-во БФ-цмф.  
Вектор из БФ-цмф может  
быть выражен в виде формулы  
над  $L$ ? Каково г.д.  $L$ ?

Обозначения:  $x^{\sigma} = x \cdot \sigma \vee \bar{x} \cdot \bar{\sigma}$

$$① x^{\sigma} = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1 \\ \bar{x}, & \text{если } \sigma = 0 \end{cases}$$

■ проверяется непосредственно ■

$$② x^{\sigma} = 1 \Leftrightarrow x = \sigma$$

$$\blacksquare x = \sigma \Rightarrow x^{\sigma} = \sigma^{\sigma} = \sigma \sigma \vee \bar{\sigma} \bar{\sigma} = \sigma \vee \bar{\sigma} = 1$$

$$x^{\sigma} = 1 \Rightarrow x \sigma \vee \bar{x} \bar{\sigma} = 1 \Rightarrow$$

$$(x \sigma = 1) \vee (\bar{x} \bar{\sigma} = 1) \Rightarrow (x = 1 \wedge \sigma = 1) \vee$$

$$(x = 0 \wedge \sigma = 0) \Rightarrow x = \sigma. \quad \blacksquare$$

Теорема: Каждую БФ  $f(x_1, \dots, x_n)$   
о разложении  
БФ по переменным  $\forall m: 1 \leq m \leq n$  можно

представить в форме:

$$(*) f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma_1, \dots, \sigma_m} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_m^{\sigma_m} \cdot f(\sigma_1, \dots, \sigma_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$$

где дизъюнкция берется по  
всевожможным наборам  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ .

■ Рассмотрим произвольный набор  
значений переменных  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$   
и покажем, что левая и правая  
части соотношения (\*) принимают  
на нем одно и то же значение.

$$\text{л.ч.: } f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$$\text{п.ч.: } \bigvee_{\sigma_1, \dots, \sigma_m} \alpha_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot \alpha_m^{\sigma_m} \cdot f(\sigma_1, \dots, \sigma_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n) =$$

если  $\alpha_i^{\sigma_i} = 0$ , то все логическое  
произведение равно нулю и в



логической сумме  $\bigvee_{\tilde{b}_i, \tilde{b}_m}$  это слог. м-0 не учитывать.

$d_i \tilde{b}_i = 1 \Leftrightarrow d_i = \tilde{b}_i \Rightarrow$  остается одно слагаемое

$$= \underbrace{L_1^{d_1} \dots L_m^{d_m}}_{\substack{\text{о разложении БФ} \\ \text{по переменной}}} \cdot f(L_1, \dots, L_m, L_{m+1}, \dots, L_n) =$$

$$= f^1(x_1, \dots, x_n).$$

Следствие 1:  $f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) =$   
о разложении БФ по переменной  $= x_n \cdot f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1) \vee \bar{x}_n \cdot f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) &= \\ &= \bigvee_{\tilde{b}_n} x_n^{\tilde{b}_n} \cdot f(x_1, \dots, x_{n-1}, \tilde{b}_n) = \\ &= x_n^0 \cdot f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \vee x_n^1 \cdot f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1) = \\ &= \bar{x}_n \cdot f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \vee x_n \cdot f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1) \end{aligned}$$

Следствие 2:  $f(x_1, \dots, x_n) =$   
о разложении по всем n переменным или об СДНФ  $= \bigvee_{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n} x_1^{\tilde{b}_1} \dots x_n^{\tilde{b}_n} \cdot f(\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n)$

Если  $f(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ , то

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\substack{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n \\ f(\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n) = 1}} x_1^{\tilde{b}_1} \dots x_n^{\tilde{b}_n}$$

Такое разложение носит название совершенной дизъюнктивной

нормальной формы — СДНФ.  
(совершенной, т.к. каждое логическое слагаемое в дизъюнкции включает все переменные; дизъюнктивной, т.к. табличная операция — дизъюнкция. нормальной — т.к. такое представление простейшее)

Следствие 2 м-0 перефразировать в виде теорем.

Теорема об СДНФ Всякая БФ, кроме  $\equiv 0$ , имеет единственную СДНФ.

Теорема о предст. БФ формулой над  $\Lambda = \{\neg, \&, \vee\}$  Каждая бул. функция может быть выражена формулой над мн-м  $\{\neg, \&, \vee\}$ .

Пусть  $f(x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \Rightarrow$   
 $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot \bar{x}_1$   
 Пусть  $f(x_1, \dots, x_n) \neq 0 \Rightarrow$  по ① об СДНФ  $f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\substack{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n \\ f(\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n) = 1}} x_1^{\tilde{b}_1} \dots x_n^{\tilde{b}_n}$



Теорема носит конструктивный характер, т.к. позволяет построить СДНФ.

- 1) В таблице истинности для  $f(x_1, \dots, x_n) \neq 0$  отмечаем все строки  $(b_1, \dots, b_n)$ , в которых  $f(x_1, \dots, x_n) = 1$ .
- 2) Для каждой такой строки образуем логическое произведение  $x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n}$  ( $b_i = 1 \Rightarrow x_i, b_i = 0 \Rightarrow \bar{x}_i$ )
- 3) Все полученные произведения объединиме знаком дизъюнкции.

Пр.:  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0011001110001000)$

Терминология

Опр.: Элементарная конъюнкция (элементарное произведение) — конъюнкция любого числа переменных, взятых по одному разу, с отрицанием или без отрицания.

Пр.:  $x_1 y_2 \bar{x}_3$  — элементарное произвед.  
 $x_1 y_2 x_3$  — не элем. элемент. произв.

Опр.: Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) функции  $f$  — дизъюнкция нескольких элементарных произведений, т.е. её таблица истинности совпадает с табл. ист. ф-ции  $f$ .

Замечания:

- 1)  $f$  — функция;  
 СДНФ, ДНФ — её формулы
- 2) СДНФ — это частный случай ДНФ, т.е. каждое элемент. произведение содержит все переменные ф-ции  $f$ .
- 3) СДНФ — единственная ДНФ — в общем случае нет.

Пр.: Пусть  $f: \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$

$$\text{СДНФ} = x y z \vee \bar{x} y z \vee x \bar{y} z = f$$

$$\text{ДНФ}_1 = y z \vee x \bar{y} z = f$$

$$\text{ДНФ}_2 = x z \vee \bar{x} y z = f$$



## §6. Принцип двойственности СКНФ.

СКНФ — это выражение вида  $\sum \prod (\bigvee \bigwedge)$  (т.е. логическая сумма произведений)

? можно ли для булевых функций получить разложение вида  $\prod \sum (\bigwedge \bigvee)$ ?

Опр. Пусть  $f(x_1, \dots, x_n)$  — БФ.

Двойственная ф-я к ф-ции  $f$  —

это ф-я  $f^*(x_1, \dots, x_n) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ .

Заметим, что для получения таблицы истинности ф-ции  $f^*$  надо инвертировать столбец функции и его проверить (при выбранном порядке наборов)

Пр. 1  $f = x_1 \vee x_2$   
 $f^* = \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} = x_1 \cdot x_2$  с-н ге-алгебра

$x_1$	$x_2$	$f$	$f^*$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

Следствие:  $f^{**} = f$

Теорема

о ф-ции, двойственной композиции ф-ции

Если:

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = f(f_1(x_{11}, \dots, x_{1p_1}), \dots, f_m(x_{m1}, \dots, x_{mp_m}))$$

Тогда:

$$\varphi^*(x_1, \dots, x_n) = f^*(f_1^*(x_{11}, \dots, x_{1p_1}), \dots, f_m^*(x_{m1}, \dots, x_{mp_m}))$$

$$\begin{aligned} \varphi^*(x_1, \dots, x_n) &= \overline{\varphi(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)} = \\ &= \overline{f(f_1(\bar{x}_{11}, \dots, \bar{x}_{1p_1}), \dots, f_m(\bar{x}_{m1}, \dots, \bar{x}_{mp_m}))} = \\ &= \overline{f(\overline{f_1(\bar{x}_{11}, \dots, \bar{x}_{1p_1})}, \dots, \overline{f_m(\bar{x}_{m1}, \dots, \bar{x}_{mp_m})})} = \\ &= \overline{f(\overline{f_1^*(x_{11}, \dots, x_{1p_1})}, \dots, \overline{f_m^*(x_{m1}, \dots, x_{mp_m})})} = \\ &= f^*(f_1^*(x_{11}, \dots, x_{1p_1}), \dots, f_m^*(x_{m1}, \dots, x_{mp_m})) \end{aligned}$$

Принцип двойственности:

Если формула  $Z1: C[\overline{f_1}, \dots, \overline{f_s}]$  строение формулы реализует ф-ю  $f(x_1, \dots, x_n)$ , то формула  $Z1^*: C[f_1^*, \dots, f_s^*]$  реализует ф-ю  $f^*(x_1, \dots, x_n)$  (Эту ф-лу будем называть двойственной к  $Z1$ )

множества, база — теорема.

Следствие Пусть  $Z1: C[0, 1, x, \bar{x}, x \vee x_2, x_1 \vee x_2]$ . Очевидно, что имеют место след. соотнош.

$f$	$f^*$
0	1
1	0
$x$	$\bar{x}$
$\bar{x}$	$x$
$x_1 \vee x_2$	$\overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$
$x_1 \cdot x_2$	$\overline{x_1 \cdot x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$



Тогда для получения  $Z1^*$  надо в формуле  $Z1$  всюду

заменить 0 на 1  
1 на 0  
 $\bar{x}$  на  $x$   
 $x$  на  $\bar{x}$   $\Rightarrow$

$$Z1^* : C [1, 0, x, \bar{x}, x_1 \vee x_2, x_1 \wedge x_2]$$

Пр:  $f = x \vee (\bar{x} \cdot y)$   
 $f^* = x \cdot (\bar{x} \vee y)$

Пусть дана  $n$ -я  $f$ . Рассмотрим теперь  $f^*$ . Разложим  $f^*$  в СДНФ (при усл. что  $f^* \neq 0$ ):

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\substack{\sigma_1, \dots, \sigma_n \\ f^*(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 1}} x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = f^{**}(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{\substack{\sigma_1, \dots, \sigma_n \\ f^*(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 1}} (x_1^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n})$$

$$= \bigwedge_{\substack{\sigma_1, \dots, \sigma_n \\ f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 0}} (x_1^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n}) = \bigwedge_{\substack{\sigma_1, \dots, \sigma_n \\ f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 0}} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n})$$

Итак:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{\substack{\sigma_1, \dots, \sigma_n \\ f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 0}} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n})$$

Такое разложение носит название совершенной конъюнктивной нормальной формы - СКНФ.

Теорема об СКНФ: Всякая БФ, кроме  $\equiv 1$ , имеет единственную СКНФ.

Также, как и для СДНФ, в самой формуле содержится алгоритм построения СКНФ.

1) В таблице истинности для  $f(x_1, \dots, x_n) \neq 1$  отмечаем все строки  $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ , в которых  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ .

2) Для каждой такой строки образуем лог. сумму  $x_1^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}$  ( $\sigma_i = 1 \Rightarrow \bar{x}_i$ ,  $\sigma_i = 0 \Rightarrow x_i$ )

3) Все полученные суммы объединяем знаком конъюнкции.

Пр:  $f(x_1, x_2, x_3) = (00111011)$

Замечание: СКНФ - единственная КНФ - в общем случае нет.



## §7 Полнота.

Мы покажем, что  $\mathcal{L} : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$  можно построить формулу над множеством  $\{\neg, \wedge, \vee\} = \Lambda$

? Существуют ли другие м.д. БФ-ы, обладающие подобными свойствами?

Опр.: Система БФ-ы  $\{f_1, \dots, f_s\} = \Lambda$  называется функционально полной (или функционально базисом), если любая БФ м.д. представлена формулой над  $\Lambda$ .

Пр.  $\{\neg, \wedge, \vee\}$  — полная.

Теорема: Пусть даны две системы БФ-ы:

$$\Lambda_1 = \{f_1, f_2, \dots, f_s\}$$

$$\Lambda_2 = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}.$$

Известно, что

- 1) система  $\Lambda_1$  полная
- 2) каждая ф-я из  $\Lambda_1$  представима формулой над  $\Lambda_2$

Тогда система  $\Lambda_2$  полная.

Пусть  $h$  — произв. БФ. Т.к.  $\Lambda_1$  полная, то  $h$  м-о выразить формулой над  $\Lambda_1$ :  $h = C[f_1, \dots, f_s]$ .

По условию теоремы

$$f_1 = C_1[g_1, \dots, g_k], \dots, f_s = C_s[g_1, \dots, g_k] \Rightarrow$$

в формуле  $C[f_1, \dots, f_s]$  м-о исключить ф-ции  $f_1, \dots, f_s$ , заменив их формулами над  $\Lambda_2$ :

$$h = C[C_1[g_1, \dots, g_k], \dots, C_s[g_1, \dots, g_k]] = C'[g_1, \dots, g_k] \text{ — ф-ла над } \Lambda_2$$

где произв. ф-ция  $h \Rightarrow \Lambda_2$  полная. ■

Пр. 1)  $\{\bar{x}, x_1, \vee x_2\}$  — полная, т.к.

$$x_1 \vee x_2 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2; \{\bar{x}, x_1, \vee x_2, x_1 \vee x_2\} \text{ — полная.}$$

2)  $\{\bar{x}, x_1, \vee x_2\}$  — полная, т.к.

$$x_1 \vee x_2 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2; \{\bar{x}, x_1, \vee x_2, x_1 \vee x_2\} \text{ — полная.}$$

3)  $\{x_1 | x_2\}$  — полная, т.к.

$$x_1 | x_2 = \overline{x_1 \vee \bar{x}_2} \text{ (по табл. ист-ти)} = \overline{x_1 \cdot x_2};$$

$$x_2 | x_1 = \overline{x_1 \cdot x_2} = \bar{x}_1;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \overline{x_1 | x_2} = \overline{(x_2 | x_2) | (x_1 | x_2)};$$

$\{\bar{x}_1, x_1 \cdot x_2\}$  — полная.

$x$	$y$	$x   y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



1)  $\{x_1, \downarrow x_2\}$  - полна, т.к.

$$x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} = \overline{x_1 \vee x_2};$$

$$x_1 \downarrow x_1 = \overline{x_1 \vee x_1} = \overline{1} = 0;$$

$$x_1 \vee x_2 = \overline{x_1 \downarrow x_2} = (x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2);$$

$\{\overline{x_1}, x_1 \vee x_2\}$  - полна.

x	y	$x \downarrow y$
00	1	
01	0	
10	0	
11	0	

5)  $\{0, 1, x_1 \cdot x_2, x_1 \oplus x_2\}$  полна, т.к.

$$x_1 \oplus 1 = \overline{x_1};$$

$\{\overline{x_1}, x_1, x_2\}$  - полна.

x	$x \oplus 1$
0	1
1	0

8.2 Полнота Нисанкина

Т.к.  $\{0, 1, x_1 \cdot x_2, x_1 \oplus x_2\}$  полна, то

$\forall f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  представима в виде:

$$(*) f(x_1, \dots, x_n) = \left( \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1 \dots i_n} x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_n} \oplus a_0 \right), \text{ где}$$

$\sum$  - сложение по mod 2  
 $a_0, a_{i_1 \dots i_n} \in \{0, 1\}$

$\{i_1, \dots, i_n\}$  - всевозможные непустые наборы из  $n$ -х им-ва  $\{1, \dots, n\}$ , причем в каждом наборе все  $i_j$  различны.

Пр:  $f(x_1, x_2) = a_{12} x_1 x_2 \oplus a_{11} x_1 \oplus a_{22} x_2 \oplus a_0$

Опр: Представление БФ формулой (\*) называется полным Нисанкина.

Теорема { Всякая БФ м.б. представлена однозначно полным Нисанкина единств. образом пред-я с помощью системы  $\{0, 1, \oplus, \cdot\}$  из переменных системы и чисел различных наборов

$\{i_1, \dots, i_n\}$  из формулы (\*) равно мощности булеана им-ва  $\{1, \dots, n\}$  (заметьте, что сюда входит и набор  $\{0\}$ , ему соотв.  $\{0\}$  в булеане)  $\Rightarrow$  число слагаемых в (\*) равно  $2^n$ .

Т.к. каждый коэф-т  $a_{i_1, \dots, i_n}$  и  $a_0$  могут принимать значения 0 или 1, то число различных полиномов равно числу векторов из 0 и 1 длины  $2^n$ , т.е. равно  $2^{2^n}$ , но это число булевых ф-й, зависящих от  $n$  переменных.

Одним из способов построения полного Нисанкина является метод неопределенных коэффициентов;



Записывается общий вид полинома. Т.к. число неизвестных коэф-в совпадает с числом строк в таблице истинности, то подставив вместо переменных конкретные значения, получаем систему уравнений:

(Пр:)  $I = d_1 x y \oplus d_2 x \oplus d_3 y \oplus d_4$

$x y \mid I = x y$

$0 \mid 0 \mid 0 = d_4$

$0 \mid 1 \mid 1 = d_2 \oplus d_4 \Rightarrow d_2 = 1$

$1 \mid 0 \mid 1 = d_1 \oplus d_4 \Rightarrow d_1 = 1$

$1 \mid 1 \mid 1 = d_2 \oplus d_1 \oplus d_3 \oplus d_4 \Rightarrow 1 = d_2 \oplus 1 \oplus 1 \Rightarrow d_3 = 1$

$I = x y \oplus x \oplus y$

$x y = \overline{x} \overline{y} = (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1 = x y \oplus x \oplus y$

### §9 Замкнутое класс

Мы показали, что  $\forall I: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$   $\exists!$  СДНФ,  $\exists!$  СКНФ,  $\exists!$  полином Шеффера. Мы найдем и другие полные системы, а значит другие группы формул.

Как строить такие группы формул? Искать функционально полную систему БФ-й.

Мы о-ли теорему о возм-ти ф-ва полноты одной системы, зная о полноте другой. Но это теорема

не всего применима: если известность выразить ф-цми из  $\Lambda_1$  (нап-ой)  $n$ -й ф-цми из  $\Lambda_2$ , то  $\Lambda_2$  полна. А если нет? Тогда вопрос о полноте  $\Lambda_2$  остается открытым.

Дальнейшие рассуждения приводят к-ть теорему Поста, дающую однозначный ответ о полноте системы (необх. и достат. условия полноты).

Опр. Пусть  $M$  - некоторое мн-во булевых функций. Замыканием  $M$  называется мн-во булевых функций, представимых в виде формул над  $M$ .

$[M]$

(Пр:)  $M = \{\bar{x}, x, \vee x_2\}$

$[M] =$  мн-во всех БФ-й  $P_2$

Опр. Мн-во (более класс)  $M$  наз-ся функционально замкнутым, если  $[M] = M$ .

Опр. Система БФ-й функ-но полна, если  $[M] = P_2$ .



Нам пока придется рассмотреть следующие 5 замкнутых классов (их замкнутость надо будет доказать).

1. Класс БФ-й  $f(x_1, \dots, x_n)$ , сохраняющих  $\text{const } 0$ , т.е.

функций, для которых  $f(0, \dots, 0) = 0$ .

$$T_0 := \{f \mid f(0, \dots, 0) = 0\}$$

Пр:  $0, x, x_1 x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \oplus x_2 \in T_0$   
 $1, \bar{x} \notin T_0$

Утв. 1 Класс  $T_0$  замкнут.

Пусть  $f, f_1, \dots, f_m \in T_0$ . Д-м, что  $\varphi = f(f_1, \dots, f_m) \in T_0$ :

$$\varphi(0, \dots, 0) = f(f_1(0, \dots, 0), \dots, f_m(0, \dots, 0)) = f(0, \dots, 0) = 0$$

2. Класс БФ, сохраняющих  $\text{const } 1$ .

$$T_1 := \{f \mid f(1, \dots, 1) = 1\}$$

Пр:  $1, x, x_1 x_2, x_1 \vee x_2 \in T_1$   
 $0, \bar{x} \notin T_1$

Утв. 2 Класс  $T_1$  замкнут.

3. Класс самодействующих БФ-й

$$S := \{f \mid f = f^*\}$$

$$f = f^* \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \Rightarrow \{f(x_1, \dots, x_n) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)\} \Rightarrow$$

В табл. ист-ти столбец ф-ции  $n$ -о задаю верхней половиной, далее — инверсия:  $\bar{\alpha}$   
 $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \Rightarrow f(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) = 1$   
 и наоборот.

Пр: 1)  $x, \bar{x} \in S$

$$2) f = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$$

последствие из принципа дб-ти

$$f^* = (x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee x_3) \cdot (x_2 \vee x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$$

$$f = f^* \checkmark$$

Утв. 3: Класс  $S$  замкнут.

Пусть  $f, f_1, \dots, f_m \in S$ . Д-м, что

$$\varphi = f(f_1, \dots, f_m) \in S:$$

$$\varphi^* \stackrel{\text{по соотв. теореме}}{=} f^*(f_1^*, \dots, f_m^*) = f(f_1, \dots, f_m) = \varphi$$

Лемма 1 Если  $f(x_1, \dots, x_n) \notin S$ , то о несамодв. функции у нее путем подстановки  $x$  и  $\bar{x}$  можно получить  $\text{const}$ .

Пусть  $f \notin S \Rightarrow \exists$  набор  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  т.ч.  $f(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) \neq f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  (иначе  $\forall$  набора



$$f(x_1, \dots, x_n) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \Rightarrow f \in S.$$

Рассмотрим  $\varphi$ -то  $h(x) = f(\underbrace{x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_n}}_{\text{погемановка } x \text{ и } \alpha})$ .

$$x^\alpha = x \cdot \alpha \vee \bar{x} \cdot \bar{\alpha}$$

$$0^\alpha = 0 \cdot \alpha \vee 1 \cdot \bar{\alpha} = \bar{\alpha}$$

$$1^\alpha = 1 \cdot \alpha \vee 0 \cdot \bar{\alpha} = \alpha$$

$$\begin{aligned} h(0) &= f(0^{\alpha_1}, \dots, 0^{\alpha_n}) = f(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) = \\ &= f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = f(1^{\alpha_1}, \dots, 1^{\alpha_n}) = h(1) \Rightarrow \\ h &= \text{const.} \end{aligned}$$

Пр.:  $f = x_1 \vee x_2$   $f^* = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \neq f \Rightarrow f \notin S.$

$$f(0, 1) = f(1, 0)$$

$$h(x) = f(x^0, x^1) = x^0 \vee x^1 = \bar{x} \vee x = 1 - \text{const.}$$

4. Класс монотонных БФ-н

$$M := \{f \mid \forall \vec{\alpha} \leq \vec{\beta}: f(\vec{\alpha}) \leq f(\vec{\beta})\},$$

где  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  - набор переменных  
 $\vec{\alpha} \leq \vec{\beta}$  если  $\forall i: \alpha_i \leq \beta_i$

Пр.: 1)  $0, 1, x, x_1 \cdot x_2, x_1 \vee x_2 \in M$

2)  $x_1 \oplus x_2 \notin M: (1, 0) \leq (1, 1)$ , но  
 $1 \oplus 0 = 1 \neq 0 = 1 \oplus 1$

Замбт: Класс  $M$  замкнут.

Пр.: Пусть  $f, f_1, \dots, f_m \in M$ . Докажем, что  
 $\varphi = f(f_1, \dots, f_m) \in M.$

Пусть  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq \vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n) \Rightarrow$   
 $\forall \vec{\alpha}^i, \vec{\beta}^i$  т.е.  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$ ,  $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_i, \dots, \beta_n)$ :  
 $\vec{\alpha}^i \leq \vec{\beta}^i$ .

Пусть  $\vec{\alpha}^1, \dots, \vec{\alpha}^m$  - набор переменных  
функций  $f_1, \dots, f_m$ .

Пусть  $\vec{\alpha}^1, \vec{\beta}^1, \dots, \vec{\alpha}^m, \vec{\beta}^m$  - набор значений этих переменных такие,  
что  $\vec{\alpha}^i \leq \vec{\beta}^i, \dots, \vec{\alpha}^m \leq \vec{\beta}^m$ .

П.к.  $f_1, \dots, f_m$  - монотонные, то  
 $f_1(\vec{\alpha}^1) \leq f_1(\vec{\beta}^1), \dots, f_m(\vec{\alpha}^m) \leq f_m(\vec{\beta}^m) \Rightarrow$   
 $(f_1(\vec{\alpha}^1), \dots, f_m(\vec{\alpha}^m)) \leq (f_1(\vec{\beta}^1), \dots, f_m(\vec{\beta}^m)).$

П.к.  $f$  монотонная, то  
 $f(f_1(\vec{\alpha}^1), \dots, f_m(\vec{\alpha}^m)) \leq f(f_1(\vec{\beta}^1), \dots, f_m(\vec{\beta}^m)) \Rightarrow$   
 $\varphi(\vec{\alpha}) \leq \varphi(\vec{\beta})$  ( $\vec{\alpha}$  и  $\vec{\beta}$  получаются  
из  $\vec{\alpha}^1, \dots, \vec{\alpha}^m$  и  $\vec{\beta}^1, \dots, \vec{\beta}^m$ , причем  $\vec{\alpha} \leq \vec{\beta}$ )  
 $\Rightarrow \varphi \in M.$

Опр.: Набор  $\vec{\alpha}$  и  $\vec{\beta}$  наз-ся соседними  
по  $i$ -й координате, если  
 $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$  и  
 $\vec{\beta} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \bar{\alpha}_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n).$



Лемма 2 Если  $f(x_1, \dots, x_n) \notin M$ , то  
о некоторой функции из неё путём подстановки констант 0 и 1 и функции  $x$  можно получить ф-ию  $\bar{x}$ .

■ Покажем, что найдётся пара соседних наборов  $\vec{\alpha}$  и  $\vec{\beta}$  т.ч.  $(\vec{\alpha} \leq \vec{\beta})$  и  $(f(\vec{\alpha}) > f(\vec{\beta}))$ .

Т.к.  $f \notin M$ , то  $\exists$  наборов  $\vec{\alpha}^1$  и  $\vec{\beta}^1$  т.ч.  $(\vec{\alpha}^1 \leq \vec{\beta}^1)$  и  $(f(\vec{\alpha}^1) > f(\vec{\beta}^1))$ .

Если  $\vec{\alpha}^1$  и  $\vec{\beta}^1$  соседние, то наша цель достигнута.

Иначе  $\vec{\alpha}^1$  отличается от  $\vec{\beta}^1$  в  $t$  ( $t > 1$ ) координатах. При этом эти  $t$  координат в наборе  $\vec{\alpha}^1$  имеют значения "0", а в наборе  $\vec{\beta}^1$  — "1" (т.к.  $\vec{\alpha}^1 \leq \vec{\beta}^1$ ). Мы можем построить цепочку соседних наборов:

$$\vec{\alpha}^1 \leq \vec{\alpha}^2 \leq \dots \leq \vec{\alpha}^t \leq \vec{\beta}^1$$

Т.к.  $f(\vec{\alpha}^1) > f(\vec{\beta}^1)$ , то найдётся хотя бы одна пара соседних

наборов  $\vec{\alpha}^i \leq \vec{\alpha}^{i+1}$  т.ч.  $f(\vec{\alpha}^i) > f(\vec{\alpha}^{i+1})$   
Итак, требуемые соседние наборы найдены:

$$\vec{\alpha} = (d_1, \dots, d_{i-1}, 0, d_{i+1}, \dots, d_n)$$

$$\vec{\beta} = (d_1, \dots, d_{i-1}, 1, d_{i+1}, \dots, d_n)$$

Рассмотрим ф-ию подстановка  $x$

$$\varphi(x) = f(d_1, \dots, d_{i-1}, x, d_{i+1}, \dots, d_n)$$

$$\varphi(0) = f(d_1, \dots, d_{i-1}, 0, d_{i+1}, \dots, d_n) =$$

$$= f(\vec{\alpha}) > f(\vec{\beta}) = f(d_1, \dots, d_{i-1}, 1, d_{i+1}, \dots, d_n) =$$

$$= \varphi(1) \Rightarrow$$

$$(\varphi(0) = 1) \text{ и } (\varphi(1) = 0) \Rightarrow \varphi(x) = \bar{x}$$

Пр:  $f = x_1 \oplus x_2 \notin M$

$$\vec{\alpha} = (1, 0), \vec{\beta} = (1, 1) \Rightarrow (1, 0) \leq (1, 1)$$

$$f(\vec{\alpha}) = 1 \oplus 0 = 1 > 0 = 1 \oplus 1 = f(\vec{\beta})$$

$$\varphi(x) = f(1, x) = 1 \oplus x = \bar{x}$$

### 5. Класс линейных БФ-и

$$L := \{f | f = \alpha \oplus \alpha_1 x_1 \oplus \dots \oplus \alpha_n x_n\}$$

Пр: 1)  $0, 1, x, \bar{x} = x \oplus 1, x_1 \oplus x_2 \in L$

$$2) x_1 \vee x_2 = x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2, x_1 x_2 \notin L$$



Упр. 5: Класс  $L$  замкнут.

■ При этом, то мод  $L$  линейных полиномов получаем снова линейный полином.

Лемма 3 Если  $f \notin L$ , то из неё путём подстановки констант 0 и 1,  $q$ -й вида  $x$  и  $\bar{x}$ , а также, бреть можно, путём навешивания отрицаний на функции  $f$ , можно получить  $q$ -ю  $x_1 \vee x_2$ .

■ Представим  $f(x_1, \dots, x_n)$  в виде полинома Желамкина:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(i_1, \dots, i_n)} \alpha_{i_1 \dots i_n} \cdot x_{i_1} \dots x_{i_n} + \alpha = (*)$$

П.к.  $f \notin L$ , то в  $\Sigma$  найдется хотя бы одно слагаемое, содержащее не менее двух сомножителей. Не ограничивая общности можно считать, что этим сомножителем является переменное

$x_1$  и  $x_2$ . Тогда полином Желамкина можно переписать в виде:

$$(*) = x_1 x_2 f_1(x_3, \dots, x_n) \oplus x_1 f_2(x_3, \dots, x_n) \oplus x_2 f_3(x_3, \dots, x_n) \oplus f_4(x_3, \dots, x_n).$$

П.к. полином единств. и  $f \notin L$ , то  $f_1(x_3, \dots, x_n) \neq 0 \Rightarrow$  найдется набор

$$(d_3, \dots, d_n) : f_1(d_3, \dots, d_n) = 1. \quad \text{подстановка } x$$

Рассмотрим функцию  $\varphi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, d_3, \dots, d_n)$  подстановка const

$$= x_1 x_2 \oplus \alpha \cdot x_1 \oplus \beta \cdot x_2 \oplus \gamma.$$

$$(\alpha = f_2(d_3, \dots, d_n), \beta = f_3(d_3, \dots, d_n), \gamma = f_4(d_3, \dots, d_n)).$$

Далее делаем замену переменных:

$$x_1 \rightarrow x_1 \oplus \beta \quad \left( \begin{array}{l} \text{если } \beta = 0, \text{ то } x_1 \rightarrow x_1 \\ \text{если } \beta = 1, \text{ то } x_1 \rightarrow \bar{x}_1 \end{array} \right) \quad \text{подстановка } x$$

$$x_2 \rightarrow x_2 \oplus \alpha \quad \left( \begin{array}{l} \text{если } \alpha = 0, \text{ то } x_2 \rightarrow x_2 \\ \text{если } \alpha = 1, \text{ то } x_2 \rightarrow \bar{x}_2 \end{array} \right)$$

Переходим к функции

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi(x_1 \oplus \beta, x_2 \oplus \alpha) \oplus \alpha \cdot \beta \oplus \gamma =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{если } \alpha \cdot \beta \oplus \gamma = 0 \text{ то } \varphi(\dots) = \varphi(\dots) \\ \text{если } \alpha \cdot \beta \oplus \gamma = 1, \text{ то } \varphi(\dots) = \bar{\varphi}(\dots) \end{array} \right\} \quad \text{навеш. отрицания}$$

$$= (x_1 \oplus \beta) \cdot (x_2 \oplus \alpha) \oplus (x_1 \oplus \beta) \alpha \oplus (x_2 \oplus \alpha) \beta \oplus \alpha \beta \oplus \gamma \oplus \gamma =$$



$$= x_1 x_2 \oplus \alpha x_1 \oplus \beta x_2 \oplus \beta \alpha \oplus \alpha x_1 \oplus \beta \alpha \oplus \beta x_2 \oplus \beta \alpha \oplus \beta \alpha \oplus \beta \alpha$$

$$= x_1 x_2$$

Пр:  $\downarrow = x_1 x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus 1$   
 $\downarrow = x_3 \quad \downarrow = 1 \quad \downarrow = 1$

возьмем  $x_3 = 1$

$$\psi(x_1, x_2) = x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1$$

$\alpha=1 \quad \beta=1 \quad \gamma=1$

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1 \oplus 1 \\ x_2 \rightarrow x_2 \oplus 1 \end{cases}$$

$$\psi(x_1, x_2) = (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1) \oplus (x_1 \oplus 1) \oplus (x_2 \oplus 1) \oplus 1 = x_1 x_2$$

$\alpha\beta\gamma=0$

В итоге  $\psi(x_1, x_2) = \psi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 1) =$   
 $= \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \oplus \bar{x}_2 \cdot 1 \oplus \bar{x}_1 \oplus 1 =$   
 $= (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1) \oplus \bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1 \oplus 1 = x_1 x_2$

### §10 Теорема о полноте

Утв. 6: Классы  $T_0, T_1, S, M, L$  попарно различимы.

	$T_0$	$T_1$	$S$	$M$	$L$
0	+	-	-	+	+
1	-	+	-	+	+
$\bar{x}$	-	-	+	-	+
$x_1 x_2$	+	+	-	+	-

Следствие: Ни один из классов  $T_0, T_1, S, M, L$  не совпадает с  $P_2$ .

### Теорема Поста о полноте

Для того, чтобы система  $\Lambda$  была полной необходимо и достаточно, чтобы она не содержалась целиком ни в одном из замкнутых классов  $T_0, T_1, S, M, L$ .

$\Rightarrow$  Пусть система  $\Lambda$  полна, т.е.  $[\Lambda] = P_2$ . От противного: пусть  $\Lambda$  целиком содержится в каком-либо классе, обозначим его  $K$ :  
 $\Lambda \subseteq K \Rightarrow P_2 = [\Lambda] \subseteq [K] = K$   
 т.к.  $\Lambda \subseteq K$  т.к. все 5 классов замкнуты

Но по утв. 6 (его следствию)  $K \subset P_2$  (ни один из 5 классов не совп. с  $P_2$ )  
 $\Rightarrow$  противоречие  $\Rightarrow \Lambda$  не сод. целиком ни в одном из 5 классов.

$\Leftarrow$  Пусть  $\Lambda$  не содержится целиком ни в одном из 5 классов. Докажем, что  $\Lambda$  полна.



Схема 9-ва:

Известно, что система  $\{\bar{x}, x_1, x_2\}$  полна. Если мы выразим  $\bar{x}$  и  $x_1, x_2$  через функции системы  $\Delta$ , то по соответствующей теореме системы  $\Delta$  также будет полна; для этого

- 1) получим  $\text{const } 0$  и  $1$
- 2) получим  $\bar{x}$  (отрицание)
- 3) получим  $x_1, x_2$  (конъюнкцию)

Д-во: т.к.  $\Delta$  не содержится целиком ни в одном из 5 классов, то из нее можно выделить подсистему  $\Delta' = \{f_0, f_1, f_3, f_4, f_5\}$ , т.е.  $f_0 \notin T_0, f_1 \notin T_1, f_3 \notin S, f_4 \notin M, f_5 \notin L$  (м-о считать, что все эти функции зависят от одного набора переменных — т.к. м-о всегда добавлять фиктивные). (Эти ф-ции могут совпадать м-о).

① При помощи ф-ий  $f_0, f_1, f_3$  построим  $\text{const } 0$  и  $1$ :

①.1 Построение  $\text{const } 1$ :

Т.к.  $f_0 \notin T_0$ , то  $f_0(0, \dots, 0) = 1$ .

Возможны два случая:

а)  $f_0(1, \dots, 1) = 1$ . Тогда построим

$$\varphi(x) = f_0(x, \dots, x) = \rightarrow$$

$$\varphi(1) = f_0(1, \dots, 1) = 1 \text{ и } \varphi(0) = f_0(0, \dots, 0) = 1 \Rightarrow$$

$$\varphi(x) \equiv 1 - \text{const}.$$

б)  $f_0(1, \dots, 1) = 0$ . Тогда также

построим  $\varphi(x) = f_0(x, \dots, x)$ , но

$$\varphi(1) = f_0(1, \dots, 1) = 0 \text{ и } \varphi(0) = f_0(0, \dots, 0) = 1 \Rightarrow$$

$\varphi(x) = \bar{x}$ . По лемме 1 о несамодвойственной ф-ции из  $f_3 \notin S$

подстановкой  $\bar{x} (= \varphi(x))$  м-о получить ф-ию  $h(x) = \text{const}$ .

Если  $h(x) \equiv 1$ , то  $\text{const}$  получена.

Если  $h(x) \equiv 0$ , то  $h(x) \equiv 1$  — исконая  $\text{const}$ .

①.2 Построение  $\text{const } 0$ :

аналогично, но рассм.  $f_1 \notin T_1$ :

$$f_1(1, \dots, 1) = 0.$$

$$\text{а) } f_1(0, \dots, 0) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = f_1(x, \dots, x) \equiv 0$$

$$\text{б) } f_1(0, \dots, 0) = 1 \Rightarrow \varphi(x) = f_1(x, \dots, x) = \bar{x} \text{ и т.д.}$$



② На основе леммы 2 о невыполнимости функции при помощи  $f_m \notin M$ , const 0 и 1 м-о получить  $\bar{x}$  (если отрицание не было получено на шаге 1)

③ На основе леммы 3 о невыполнимости функции при помощи  $f_4 \notin L$ , const 0 и 1, отрицания  $\bar{x}$  м-о получить конъюнкцию  $x_1 \cdot x_2$ .

Т.о. система  $\Lambda'$  полна  $\Rightarrow$

$[\Lambda'] = P_2$ . Т.к.  $\Lambda' \subseteq \Lambda \Rightarrow$

$[\Lambda'] \subseteq [\Lambda] \subseteq P_2 \Rightarrow [\Lambda] = P_2$  ■

Следствие 1: Из любой полной системы м-о выделить полную подсистему, содержащую не более пяти функций.

Следствие 2: Число ф-й из след. 1 м-о получить до четырех.

■ Из 9-ти теорем Поста имеем:  
 $f_0 \notin T_0 \Rightarrow$  либо  $f_0(0, \dots, 0) = 1 = f_0(1, \dots, 1) \Rightarrow$

$f_1 \notin S$

либо  $f_0(1, \dots, 1) = 0 \Rightarrow f_0 \notin T_1$  и  $f_0 \notin M$   
 Поэтому полной будет либо система  $\{f_0, f_1, f_m, f_4\}$ , либо система  $\{f_0, f_3, f_4\}$ . ■

Следствие 3 Число ф-й можно получить.

	$T_0$	$T_1$	$S$	$M$	$L$
$x_1 \cdot x_2$	+	+	-	+	-
0	+	-	-	+	+
1	-	+	-	+	+
$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$	+	+	+	-	+

Т.о. система  $\{x_1, x_2, 0, 1, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3\}$  полна, но удаление любой из функций приводит к неполной системе. ■

Следствие 2, 3 говорит о том, что любую систему м-о сократить до 4 ф-й, не потеряв полноту. Но могут быть полные системы, содержащие 3, 2 и даже 1 функцию.

Опр. Классы  $T_0, T_1, S, M, L$  называются замкнутыми классами Поста (постовскими классами).



## §11 Минимизация логич. формул.

Этот § имеет прикладное значение. Мы опустим д-ва, сделав упор на алгоритмы и примеры решения задач.

Мы д-ли, что в БФ м-о построить единств. СДНФ (СКНФ). Пользуясь эквив. преобр. и известными тождествами (аксиоматич. метод) м-о упростить эти формулы, получив ДНФ (КНФ). Очевидно, что такие преобразования не единственны, и для одной СДНФ (СКНФ) м-о получить различные эквивалентные ДНФ (КНФ). В связи с этим возникает задача минимизации: требуется отыскать такую формулу, реализующую данную функцию  $f$ , в которой содержится бы наименьшее

число <sup>переменных</sup> переменных.

Отметим, что мы рассматриваем базис  $\{ \wedge, \vee, \neg \}$ . Теоретически м-о поставить вопрос и о мин-ции формулы в другом базисе. Но наиболее разработанными и востребованными являются все же алгоритмы минимизации в указанном базисе  $\{ \wedge, \vee, \neg \}$ .

Будем рассматривать минимизацию в дизъюнктивных нормальных формах, хотя все алгоритмы могут быть преобразованы для работы с КНФ.

Опр. Минимальной ДНФ (МДНФ) функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  называется ДНФ, реализующая функцию  $f$  и содержащая минимальное



число символов переменных по сравнению со всеми другими видами ДНФ, реализующими функцию  $f$ .

Опр.: БФ  $g(\vec{x})$  называется импликантной БФ  $f(\vec{x})$ , если  $\forall \vec{x} \text{ т.ч. } g(\vec{x}) = f \Rightarrow f(\vec{x}) = f$ .

Пр.:  $f = (xy) \vee xz$ ;  $g = xy$ ;

Опр.: Простая импликанта БФ  $f(\vec{x})$  — это элементарная конъюнкция, которая является импликантной этой функции, но никакая её собственная часть уже не является импликантной этой ф-ции.

Пр.:  $f = xy \vee xz \vee yz$

$g_1 = xy \vee xz$  — импликанта, но не простая

$g_2 = xz$  — простая импликанта

Опр.: Сокращённая ДНФ (Сокр.ДНФ) функцией  $f$  — это дизъюнкция всех простых импликант функцией  $f$ .

Теорема: Для любой БФ  $f \neq 0 \exists !$  Сокр.ДНФ.

■ самостоятельно (см. метод Квайна) ■

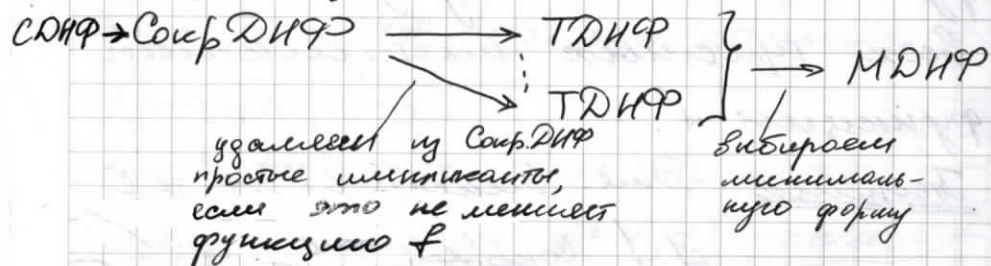
Опр.: Тупиковая ДНФ (ТДНФ) функцией  $f$  — это такая ДНФ её простых импликант, из которых нельзя возросить ни одну импликанту, не уменьшив функцией  $f$ . (т.е. из Сокр.ДНФ убираем "лишн." импликанты)

Замечание ① Представление ф-ции в виде ТДНФ в общем случае не единственно.

② Выбрав из всех тупиковых ДНФ форму с наименьшим числом переменных, получаем МДНФ.



Выбор: Схема алгоритма минимизации:



## 2.1. Метод Квайна (мак-Наски)

СДНФ  $\rightarrow$  Сопр ДНФ  $\rightarrow$  МДНФ

Шаг 1 Логическая ф-я представляется в СДНФ:

- если ф-я задана таблицей истинности, то СДНФ строит "по единицам";
- если ф-я задана произвольной ДНФ, то применяются законы разбрасывания:

$$xy = xy(x \vee \bar{x}) = xy\bar{x} \vee xyx$$

Шаг 2 В полученной СДНФ проводят

- 1) всевозможные операции неполного склеивания:  $Ax \vee A\bar{x} = Ax \vee A\bar{x} \vee A$

(23)

- 2) а затем пополам:

$$[Ax \vee A\bar{x} = A]$$

(здесь  $A$  - элементарная конъюнкция)  
Операции склеивания проводят в следующем порядке:

- а) выполняются все возможные склеивания 1-й элементарной конъюнкции с остальными;
- б) выполняются все возможные склеивания 2-й элементарной конъюнкции с остальными, кроме 1-й;
- в) ... 3-й - с остальными, кроме 1-й и 2-й и т.д.

Склеиваться могут только те элементарные конъюнкции, у которых число переменных с отрицательными отменяется на единицу.



Неполное склеивание и помощение приводит до тех пор, пока это возможно

Сокр. ДНФ

Пр:

Пусть  $f(x, y, z, p) = 1$  на наборах  $\{0, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13\}$ .

	x	y	z	p	f
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

$$\text{СДНФ} = \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{p} \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{p} \vee \bar{x}y\bar{z}p \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{p} \vee \bar{x}y\bar{z}p \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{p} \vee \bar{x}y\bar{z}p \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{p}$$

$$\bar{x}y\bar{z}p \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{p} \vee \bar{x}y\bar{z}p \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{p} \vee \bar{x}y\bar{z}p \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{p} \vee \bar{x}y\bar{z}p \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{p}$$

$$\bar{x}y\bar{z}\bar{p} \vee \bar{x}y\bar{z}p \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{p} \vee \bar{x}y\bar{z}p \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{p} \vee \bar{x}y\bar{z}p \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{p} \vee \bar{x}y\bar{z}p$$

1 этап  $= \bar{x}\bar{z}\bar{p} \vee \bar{y}\bar{z}\bar{p} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}p \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{p} \vee \bar{x}y\bar{z}p \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{p} \vee \bar{x}y\bar{z}p$

1-2  $\rightarrow$  нельзя  
1-5  $\rightarrow$  сразу  
2-3  $\rightarrow$  можно  
3-4  $\rightarrow$  можно  
3-9  $\rightarrow$  можно  
5-6  $\rightarrow$  можно  
5-7  $\rightarrow$  можно  
6-8  $\rightarrow$  можно  
6-9  $\rightarrow$  можно  
7-8  $\rightarrow$  можно

если есть одинаковые  $\bar{x}y\bar{z}$  кон.  
сократить до одного представится

2 этап  $= \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{z}\bar{p} \vee \bar{y}\bar{z}\bar{p} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}p \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{p} \vee \bar{x}y\bar{z}p$

6-10  $\bar{x}\bar{z}\bar{p} \vee \bar{y}\bar{z}\bar{p} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}p \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{p} \vee \bar{x}y\bar{z}p \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{p} \vee \bar{x}y\bar{z}p$

1-8  $\bar{x}y\bar{z}p \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{p} \vee \bar{x}y\bar{z}p \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{p} \vee \bar{x}y\bar{z}p \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{p} \vee \bar{x}y\bar{z}p \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{p}$

= Сокр. ДНФ

Алгоритм построения Сокр. ДНФ

1. Положить  $Z_1 = \text{СДНФ}$
2. Положить  $n = \text{числу переменных}$
3. Провести все возможные операции неполного склеивания для входных в  $Z_1$  элементарных произведений, содержащих ровно  $n$  переменных. Все найденные элементарные произведения, ранее отсутствовавшие в  $Z_1$ , дописать в неё через дизъюнкцию. Если  $Z_1$  не изменилась, перейти к пункту 6.
4. Убрать из  $Z_1$  все элементарные произведения, содержащие  $n$  переменных, для которых операция неполного склеивания была выполнена хотя бы один раз, т.е. выполнить помощение.
5. Если  $n \neq 1$ , то  $n := n - 1$  и перейти на шаг 3.
6. Алгоритм завершен.



Шаг 3 Зная Сокр ДНФ, находит МДНФ по минимекантной матрице.

Опр. Минимекантная матрица — это таблица:

столбцы — элементор. конъюнк.

из СДНФ;

строки — простое минимеканты

из Сокр. ДНФ.

Если минимеканта "помогается" элементорной конъюнкцией, то соответствующая клетка отмечается "\*".

МДНФ находится как дизъюнкция минимекантов, которые соединены по покрывающей звёздочками все столбцы минимекантной матрицы.

Замечание: по минимекантной матрице можно получить несколько ТДНФ, среди которых будет МДНФ.

Пр. (продолжение)

	xȳz̄p	x̄yz̄p	x̄ȳz̄p	x̄yz̄p	xȳz̄p	x̄yz̄p	x̄ȳz̄p	x̄yz̄p	xȳz̄p
xȳz̄p	*								
x̄yz̄p	*				*				
xȳz̄p		*	*						
x̄yz̄p			*	*					
xȳz̄p			*	*					*
x̄yz̄p			*	*		*			*
xȳz̄p					*	*	*	*	

Алгоритм построения МДНФ по минимекантной матрице.

- 1) Для всех столбцов, содержащих ровно одну "\*", вписать в МДНФ дизъюнкцию соответствующее простое минимеканты.
- 2) Удалить из таблицы все столбцы, в которых на пересечении со строками, выделенными на шаге 1, стоит \*.
- 3) Удалить из таблицы все строки, соответствующие, выдел. на шаге 1 простому минимекантам, а также все строки, в которых нет ни одной \*.



- ④ Подписать столбцы 1-3 до тех пор, пока таблица уменьшается.
- ⑤ Из оставшихся строк перебрать все возможные варианты выбрать минимальное по суммарному числу вхождений переменных мин-во простых импликант так, чтобы все оставшиеся столбцы имели на пересечении хотя бы с одной из выбранных строк "1".

Пр.: (продолжение)  
 $MDNF = \{ \overline{x}\overline{y} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \dots \}$

	$\overline{x}\overline{y}\overline{z}$	$\overline{x}y\overline{z}$	$\overline{x}y\overline{z}$
$\overline{x}\overline{z}$	*	*	
$\overline{y}\overline{z}$	*		
$\overline{x}y\overline{z}$		*	
$y\overline{z}$			*
$\overline{x}\overline{z}$			*

$MDNF_1 = \overline{x}\overline{y} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}\overline{z} \vee y\overline{z} = TDNF_1$   
 $MDNF_2 = \overline{x}\overline{y} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} = TDNF_2$   
 $\overline{x}\overline{y} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{y}\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}\overline{z} = TDNF_3$   
 $\overline{x}\overline{y} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{y}\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}\overline{z} = TDNF_4$

## п.2. Метод Петрика

Отличается от метода Квайна-Майнз (работой с минимизацией матрицей).

Все простые импликанты из СКНФ обозначаются буквами. Для каждого столбца минимизации строится дизъюнкция всех букв, соответствующих тем импликантам, которые перекрывают данный столбец. Полученные дизъюнкции объединяются через конъюнкцию.

— получаем некоторую КНФ. Преобразуем её в ДНФ. В полученной ДНФ каждое элементарное произведение определяет набор простых импликант для ТДНФ.



Пр:

		0000	0100	0101	0111	1000	1001	1010	1011	1101
0-00	A <sub>3</sub>	*	*							
-000	B <sub>3</sub>	*				*				
010-	C <sub>3</sub>		*	*						
01-1	D <sub>3</sub>			*	*					
-101	E <sub>3</sub>			*						*
1-01	F <sub>3</sub>						*			*
10--	G <sub>2</sub>					*	*	*	*	

$$\begin{aligned}
 & (A \vee B)(A \vee C)(C \vee D \vee E)(D)(B \vee G)(E \vee G)(G)(G)(E \vee F) = \\
 & = DG(A \vee BC)(E \vee F) = \\
 & = (ADG \vee BCDG)(E \vee F) = \\
 & = \underbrace{(ADGE)}_{MDHP_1} \vee \underbrace{(ADGF)}_{MDHP_2} \vee BCDGE \vee BCDFG
 \end{aligned}$$

### п.3. Метод Блейка - Горьского

Отличается от метода Квайна тем, что в нем строятся не по СДНФ, а по произвольной ДНФ. Основу метода составляет след. утв.:

если в **ДНФ** встречается две конъюнкции  $Ax$  и  $B\bar{x}$ , то

$$I = I \vee AB$$

Для построения Сопр.ДНФ исходную ДНФ следует дополнить

новыми элементарными произведением по указанному правилу, затем выполнить сокращение, затем снова дополнить и снова выполнить сокращение и т.д., до тех пор, пока это возможно.

Пр.

$$I = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$$

Пары, удовлетворяющие теореме:

$$\begin{aligned}
 & (\bar{x}_1 \bar{x}_2, \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3), (\bar{x}_1 \bar{x}_2, \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3), \\
 & (\bar{x}_2 x_3, \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3), (\bar{x}_2 x_3, x_1 x_2 \bar{x}_3), \\
 & (\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3, \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \\
 & x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 = \\
 & = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3 = (*)
 \end{aligned}$$

Пары, удовлетворяющие теореме:

$(\bar{x}_1 \bar{x}_2, \bar{x}_2 x_3)$  - но эта пара ничего не добавляет  $\Rightarrow$

$$(*) = \text{Сопр.ДНФ}$$



# н.с. Карты Карно

## Способы представления БФ

табличный	алгебраический	графический
таблица истинности	СДНФ	Карта Карно

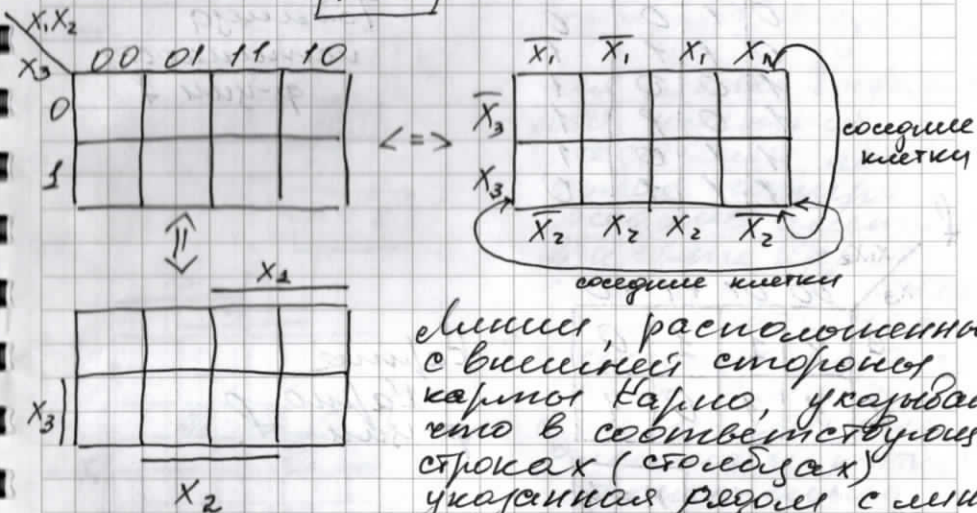
Карта Карно содержит  $2^n$  клеток. Каждая клетка (как и строка в таблице истинности) соответствует одному набору переменных.

Для того, чтобы по карте Карно можно было проводить минимизацию логической функции, необходимо:

- П в клетках, отмеченных в симметричном смысле сопоставить соседние (разные в одной координате) наборы.

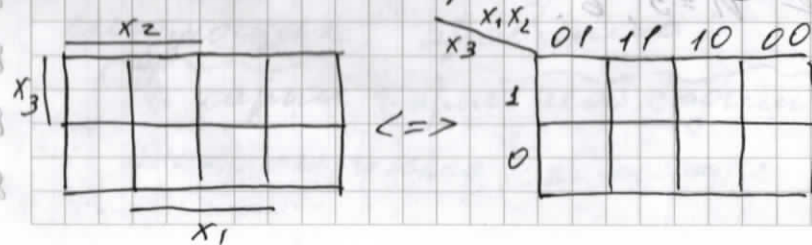
## Иташские карты Карно

$n=3$



Линии, расположенные с внешней стороны карт Карно, указывают, что в соответствующих строках (столбцах) указанная рядом с линией переменная встречается в наборе без отрицания. Соответственно, в оставшихся строках (столбцах) эта переменная входит в набор с отрицанием.

Замечание: Предложенный способ расстановки переменных не единственен. Главное, чтобы сохранилось правило П.





Пр.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

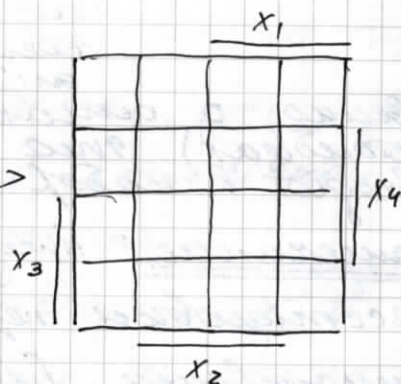
Таблица истинности ф-ции  $f$

$x_3$	$x_1 x_2$	00	01	11	10
0	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1

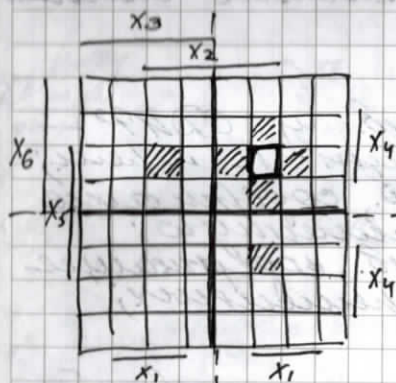
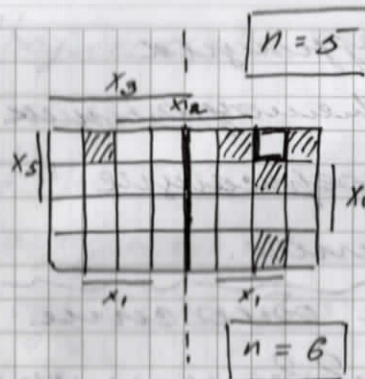
Карта Карно ф-ции  $f$

$x_3 x_4$	$x_1 x_2$	00	01	11	10
00					
01					
11					
10					

$\Leftrightarrow$



Существуют карты Карно для  $n=5, 6$ .



Правило 17  
(правило соседства):  
для любой выделенной клетки соседними являются четыре соседние клетки в карте Карно для  $n=4$  и клетки, расположенные в соседних картах Карно для  $n=4$  симметрично выделенной клетки относительно границ соседних карт.

Процесс минимизации по карте Карно.

Процесс минимизации базируется на использовании операций склеивания и основан на следующих правилах:

На карте Карно необходимо выделять максимальные области единиц



ных клеток, образующих строку, столбец, прямоугольник или квадрат, и содержащие 1, 2, 4, 8 и т.д. клеток.

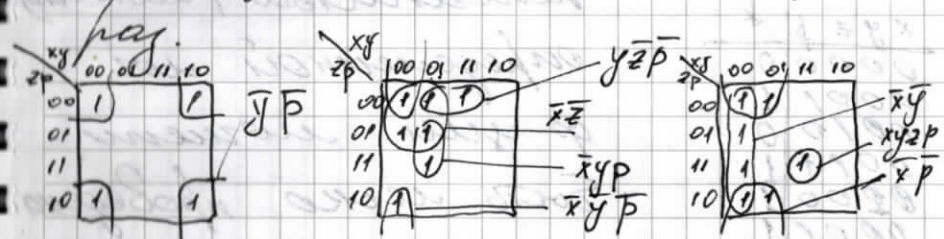
Эти выделенные области будут соответствовать миним-кантам:

- 1 клетка — эл. проиуд. из СДНФ — содержит 1 переи.;
- 2 клетки — эл. проиуд. содержащее (n-1) переи.;
- 4 клетки — эл. проиуд. содержащее (n-2) переи.;
- и т.д.

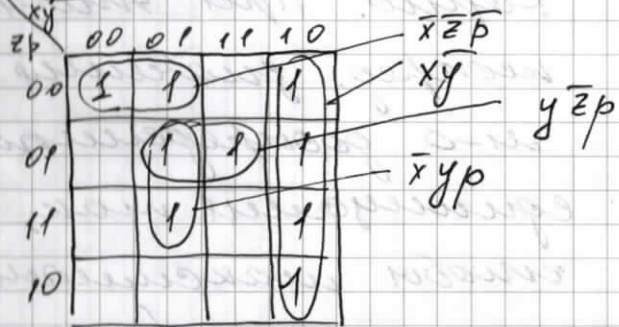
① Переиенная, от которой минимканта не зависит, входит в выделенной контур как в виде  $x_i$ , так и в виде  $\bar{x}_i$ .  
Остальные переиенные — только в виде  $x_i$ , либо  $\bar{x}_i$  так же как  $\bar{x}_i$ .

② Любая <sup>единичная</sup> клетка может быть включена в любое число

различных контуров. Но для получения МДНФ в канонической форме не должно быть лишних покрытий, т.е. каждая единичная клетка должна использоваться хотя бы один



Пр.: (продолжение)



SPR Минимизация частично определенных лог. ф-и

Напомним, что мы по-прежнему минимизируем формулу.



Пр. БУНау-ся частично определ  
если в табл. истинности  
хотя бы на одном наборе  
значение ф-ции не определе-  
но (ставится прочерк).

Пр.:

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	-
1	1	0	0
1	1	1	-
1	1	0	-
1	1	1	-
1	1	1	1

Минимизация  
неполноты (частично)  
определенной лог.  
ф-ции может  
быть легко проведена  
с помощью карт  
Карно. При этом  
неопред. значения  
м-о доопределить  
единицами так,  
чтобы максимизировать

по упрощенной лог. формуле

xy \ z	00	01	11	10
00	0	1	-	1
01	1	1	1	1
11	1	0	1	-
10	0	1	-	0