

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования

ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. Ф.М. ДОСТОЕВСКОГО

**Т. В. Вахний**

# **ЭЛЕКТРОТЕХНИКА**

Задачник

ISBN 978-5-7779-2185-7

© Вахний Т.В., 2017

© ФГБОУ ВПО «ОмГУ им. Ф.М. Достоевского», 2017



2017

УДК 621.3  
ББК 31.2я73  
В223

*Рекомендовано к изданию  
редакционно-издательским советом ОмГУ*

*Рецензенты:*

*А.К. Гуц, д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры кибернетики  
ОмГУ им. Ф.М. Достоевского;*

*О.В. Лях, канд. техн. наук, доц. кафедры физики ОмГТУ*

**Вахний, Т. В.**

**В223** Электротехника [Электронный ресурс] : задачник / Т. В. Вахний. – Электрон. текстовые дан. – Омск : Изд-во Ом. гос. ун-та, 2017. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM) ; 12 см.

**ISBN 978-5-7779-2185-7**

Излагаются краткие теоретические сведения, необходимые для решения задач по электротехнике, приводятся основные формулы и уравнения, типовые задачи с решениями и пояснениями, задачи для самостоятельного решения, а также контрольные вопросы для проверки усвоенного материала.

Для студентов факультета компьютерных наук, обучающихся по направлениям подготовки 10.03.01 – «Информационная безопасность», 09.03.01 – «Информатика и вычислительная техника» и по специальности 10.05.01 – «Компьютерная безопасность».

**УДК 621.3  
ББК 31.2я73**

*Текстовое электронное издание*

*Деривативное электронное издание,*

*созданное на основе печатного: Вахний, Т. В. Сборник задач по электротехнике / Т. В. Вахний. – Омск : Изд-во Ом. гос. ун-та, 2015. – 84 с.*

Минимальные системные требования:

PC, Pentium и выше с частотой не ниже 500 MHz; ОЗУ 256 Мб; Microsoft Windows 2000/XP/Vista/7; Adobe Acrobat Reader 5.0 и выше; CD-ROM; мышь

ISBN 978-5-7779-2185-7

© Вахний Т.В., 2017



© ФГБОУ ВО «ОмГУ  
им. Ф.М. Достоевского», 2017

---

---

## **Навигация по изданию: инструкция для читателей**

1. Для быстрого перехода к нужному разделу используйте интерактивное содержание:

- нажмите кнопку «Закладки» (иконка имеет вид  или ) на боковой (левой) панели;
- в открывшейся панели, прокручивая Содержание, найдите название раздела;
- кликнув по названию раздела, перейдите к его тексту.

2. Если боковая панель с кнопкой «Закладки» отсутствует, настройте ее следующим образом:

- если вы используете раннюю версию Adobe Reader, зайдите в меню «Просмотр», выберите «Панели навигации», нажмите кнопку «Закладки»;
- если вы используете последние версии Adobe Reader, зайдите в меню «Просмотр», выберите «Показать / Скрыть», далее – «Области навигации», в выпадающем меню нажмите «Закладки».

Далее действуйте в соответствии с указаниями п. 1.

---

---

---

---

Технический редактор *М.В. Быкова*

Дата выпуска: 27.11.2017.

1 электрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см.

Тираж 10 копий. Объем 1,9 Мб.

Издательство  
Омского государственного университета  
им. Ф.М. Достоевского

644077, г. Омск, пр. Мира, 55а

тел.: 8(3812) 67-32-55, 64-30-61, 64-13-07

---

---

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b> .....	7
<b>Глава 1. Расчет эквивалентных параметров соединений элементов</b>	
1.1. Последовательное, параллельное и смешанное соединение элементов.....	8
1.2. Преобразование элементов, соединенных по схемам звезды и треугольника .....	12
1.3. Эквивалентные преобразования источников .....	14
1.4. Задачи.....	15
<i>Контрольные задачи</i> .....	18
<i>Контрольные вопросы</i> .....	20
<b>Глава 2. Электрические цепи постоянного тока</b>	
2.1. Законы Кирхгофа .....	21
2.2. Метод контурных токов .....	24
2.3. Метод узловых потенциалов .....	26
2.4. Метод эквивалентного генератора .....	28
2.5. Принцип и метод наложения .....	31
2.6. Задачи.....	33
<i>Контрольные задачи</i> .....	35
<i>Контрольные вопросы</i> .....	36
<b>Глава 3. Электрические цепи синусоидального тока</b>	
3.1. Расчет электрических цепей синусоидального тока по мгновенным значениям .....	37
3.2. Расчет электрических цепей синусоидального тока по комплексным значениям .....	41
3.3. Резонансные электрические цепи.....	45
3.4. Однофазный трансформатор .....	46
3.5. Задачи.....	48

<i>Контрольные задачи</i> .....	52
<i>Контрольные вопросы</i> .....	53

#### **Глава 4. Электрические цепи периодического несинусоидального тока**

4.1. Формы представления гармонического ряда Фурье .....	54
4.2. Расчет электрических цепей периодического несинусоидального тока .....	56
4.3. Электрические фильтры .....	58
4.4. Задачи .....	62
<i>Контрольные задачи</i> .....	65
<i>Контрольные вопросы</i> .....	67

#### **Глава 5. Переходные процессы в линейных электрических цепях**

5.1. Расчет переходных процессов классическим методом .....	68
5.2. Расчет переходных процессов операторным методом .....	71
5.3. Расчет переходных процессов смешанным методом.....	74
5.4. Задачи .....	76
<i>Контрольные задачи</i> .....	80
<i>Контрольные вопросы</i> .....	82

<b>Ответы к задачам</b> .....	83
-------------------------------	----

<b>Список использованной и рекомендуемой литературы</b> .....	86
---	----

## ПРЕДИСЛОВИЕ

---

Теоретический курс электротехники невозможно хорошо освоить без навыков проведения практических расчетов электрических цепей. Задачник охватывает следующие разделы линейных электрических цепей:

1. Расчет эквивалентных параметров соединений элементов.
2. Электрические цепи постоянного тока.
3. Электрические цепи синусоидального тока.
4. Электрические цепи периодического несинусоидального тока.
5. Переходные процессы в линейных электрических цепях.

В описании каждой части приводятся краткие теоретические сведения, необходимые для решения задач, примеры решения типовых задач, разделы с задачами для самостоятельного решения и контрольные вопросы для проверки усвоенного материала.

Для выполнения заданий необходимо изучить теоретический материал и ознакомиться с примерами решения типовых задач, приведенными в настоящем пособии. При оформлении решения любой задачи следует вначале четко изложить условия задачи, привести исходную электрическую схему и проставить на ней буквенные и числовые значения параметров элементов.

При решении задач необходимо четко указывать порядок решения и используемые при расчете формулы. В ходе решения можно приводить краткие комментарии. В окончательных результатах расчета нужно обязательно указывать размерность полученных значений величин.

## Глава 1

# РАСЧЕТ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПАРАМЕТРОВ СОЕДИНЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ

---

При расчете электрических цепей часто возникает необходимость преобразования схем этих цепей или их части в более простые и удобные для расчета. Существует четыре основных вида соединений элементов: последовательное, параллельное, смешанное и сложноразветвленное (звездой и многоугольником).

Описываемые ниже приемы преобразования схем электрических цепей применимы для цепей постоянного и переменного тока.

### 1.1. Последовательное, параллельное и смешанное соединение элементов

**Последовательным соединением** элементов называется такое, при котором начало последующего элемента соединяется с концом предыдущего. На рис. 1.1а показано последовательное соединение сопротивлений. Часто такая цепь (или участок цепи) называется **неразветвленной**. Отличительной особенностью последовательного соединения является то, что во всех элементах протекает одинаковый ток. При таком соединении напряжение, приложенное к цепи, равно сумме падений напряжений на отдельных сопротивлениях:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = IR_1 + IR_2 + IR_3 = IR_{\text{экв}}, \quad (1.1)$$

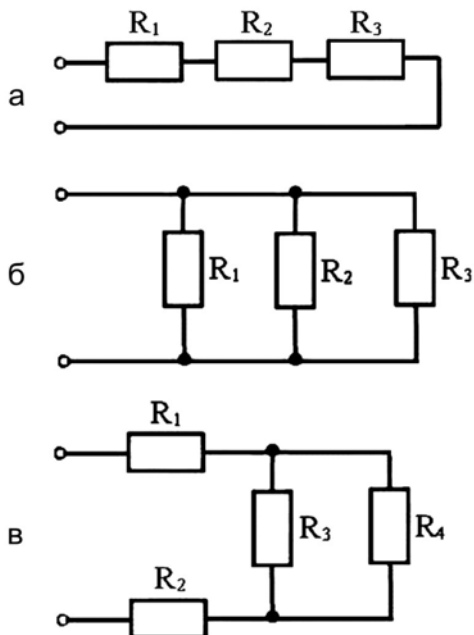
где  $R_{\text{экв}} = R_1 + R_2 + R_3$  – эквивалентное сопротивление всей последовательной цепи, равное сумме сопротивлений отдельных сопротивлений.

При изменении величины сопротивления одного из приемников в цепи происходит изменение тока и перераспределение падений напряжений между приемниками, т. е. изменяется режим работы всех сопротивлений.

При последовательном соединении проводимостей эквивалентная проводимость определяется по формуле

$$\frac{1}{G_{\text{экв}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{G_k}. \quad (1.2)$$





**Рис. 1.1.** Схемы соединения сопротивлений:  
 а – последовательное соединение; б – параллельное соединение;  
 в – смешанное соединение

Для последовательного соединения индуктивностей и емкостей используются аналогичные соотношения:

$$L_{\text{экв}} = \sum_{k=1}^n L_k, \quad \frac{1}{C_{\text{экв}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}. \quad (1.3)$$

При объединении последовательно соединенных идеальных источников напряжения эквивалентное напряжение определяется их алгебраической суммой, знаки в которой учитывают направление отдельных источников:

$$E_{\text{экв}} = \sum_{k=1}^n \pm E_k. \quad (1.4)$$

Последовательное соединение идеальных источников тока не допускается, так как значение тока эквивалентного источника в этом случае оказывается неопределенным. Однако последовательное

включение реальных источников тока позволяет определить проводимость и ток эквивалентного источника по формулам:

$$\frac{J_{\text{экв}}}{G_{\text{экв}}} = \sum_{k=1}^n \pm \frac{J_k}{G_k}, \quad \frac{1}{G_{\text{экв}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{G_k}. \quad (1.5)$$

В первой формуле учитывается полярность составляющих токов.

**Параллельным соединением** элементов называется такое, при котором начала всех элементов соединены в один узел, а концы – в другой. На рис. 1.1б показано параллельное соединение сопротивлений. При таком соединении цепь получается **разветвленной**, а сами сопротивления являются ее ветвями. Отличительной особенностью параллельного соединения является то, что все сопротивления находятся под одним и тем же напряжением. Токи в ветвях можно рассчитать по закону Ома:

$$I_1 = U/R_1 = UG_1, \quad I_2 = U/R_2 = UG_2, \quad I_3 = U/R_3 = UG_3, \quad (1.6)$$

где  $G_1 = 1/R_1$ ,  $G_2 = 1/R_2$ ,  $G_3 = 1/R_3$  – проводимости отдельных сопротивлений.

Согласно первому закону Кирхгофа ток в неразветвленной части цепи равен:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} = U \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = \frac{U}{R_{\text{экв}}}, \quad (1.7)$$

где  $\frac{1}{R_{\text{экв}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$  – величина, обратная эквивалентному сопротивлению параллельной цепи.

Переходя к проводимостям, получим:

$$I = U(G_1 + G_2 + G_3) = UG_{\text{экв}}, \quad (1.8)$$

где  $G_{\text{экв}} = G_1 + G_2 + G_3 = 1/R_{\text{экв}}$  – эквивалентная проводимость параллельной цепи, равная сумме проводимостей отдельных приемников.

При параллельном включении сопротивлений режим работы каждого из них не влияет на режим работы остальных.

При параллельном соединении индуктивностей, емкостей и источников тока их эквивалентные значения определяются по формулам

$$\frac{1}{L_{\text{экв}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k}, \quad C_{\text{экв}} = \sum_{k=1}^n C_k, \quad J_{\text{экв}} = \sum_{k=1}^n \pm J_k. \quad (1.9)$$

В последней формуле учитываются направления составляющих источников тока.

Параллельное соединение идеальных источников напряжения не допускается, так как при этом напряжение эквивалентного источника оказывается неопределенным. Однако параллельное соединение реальных источников напряжения, в которых учтены внутренние сопротивления составляющих источников, позволяет определить напряжение эквивалентного источника и его сопротивление по формулам:

$$\frac{E_{\text{экв}}}{R_{\text{экв}}} = \sum_{k=1}^n \pm \frac{E_k}{R_k}, \quad \frac{1}{R_{\text{экв}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}. \quad (1.10)$$

В первой формуле учитывается полярность составляющих источников.

**Смешанное соединение** элементов представляет собой цепь, которая состоит из ряда последовательно и параллельно соединенных элементов. На рис. 1.16 показано смешанное соединение резисторов. Для расчета таких цепей выделяют отдельные участки с последовательным и параллельным соединением элементов и к ним применяют выше указанные соотношения.

Для схемы, изображенной на рис. 1.16, эквивалентное сопротивление находится следующим образом. Сначала определяется эквивалентное сопротивление параллельных ветвей.

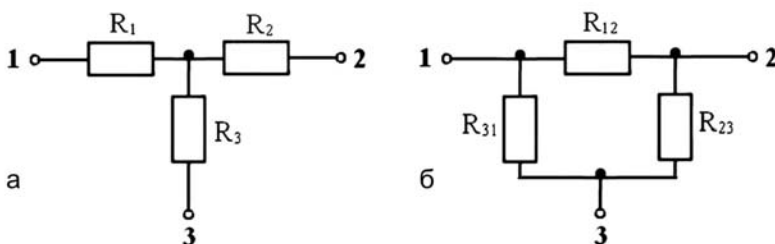
Поскольку  $\frac{1}{R_{34}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$  то  $R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$ .

Сопротивления  $R_1$  и  $R_2$  включены последовательно с сопротивлением  $R_{34}$ , поэтому эквивалентное сопротивление всей цепи равно  $R_{\text{экв}} = R_1 + R_2 + R_{34}$ .

Ток в неразветвленной части цепи равен  $I = U/R_{\text{экв}}$ . Напряжение на сопротивлении  $R_1$  равно  $U_1 = IR_1$ , а на сопротивлении  $R_2$  равно  $U_2 = IR_2$ . Напряжение на зажимах параллельных ветвей равно  $U_{34} = IR_{34}$ . Токи в параллельных ветвях равны  $I_3 = U_{34}/R_3$ ,  $I_4 = U_{34}/R_4$ .

## 1.2. Преобразование элементов, соединенных по схемам звезды и треугольника

Если электрическая цепь с четырьмя или более узлами не может быть отображена схемой со смешанным соединением элементов, то ее называют **сложноразветвленной**. Если три ветви или более имеют один общий узел, то их соединение называется **звездой** (рис. 1.2а). Если электрическая цепь содержит более двух узлов и каждый узел соединен с другим только одной ветвью, то такое соединение называют **многоугольником**. Минимальное число узлов и ветвей в многоугольнике равно трем. При этом образуется очень распространенное на практике соединение элементов **треугольником** (рис. 1.2б).



**Рис. 1.2.** Соединения сопротивлений:  
а – по схеме «звезда», б – по схеме «треугольник»

В ряде случаев бывает необходимо выполнить преобразование элементов, соединенных по схемам трехлучевой звезды или по схеме треугольника, а после этого становится возможным выполнить эквивалентные преобразования и определить входное сопротивление цепи.

Формулы преобразования соединения сопротивлений звездой в соединение треугольником и обратно имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} R_{12} &= R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}, & R_1 &= \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \\ R_{23} &= R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}, & R_2 &= \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \\ R_{31} &= R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}, & R_3 &= \frac{R_{23} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Преобразования звезды в треугольник и обратно можно выполнить для индуктивностей и емкостей. Для индуктивностей они имеют аналогичный вид:

$$\begin{aligned} L_{12} &= L_1 + L_2 + \frac{L_1 L_2}{L_3}, & L_1 &= \frac{L_{12} L_{31}}{L_{12} + L_{23} + L_{31}}, \\ L_{23} &= L_2 + L_3 + \frac{L_2 L_3}{L_1}, & L_2 &= \frac{L_{12} L_{23}}{L_{12} + L_{23} + L_{31}}, \\ L_{31} &= L_3 + L_1 + \frac{L_3 L_1}{L_2}, & L_3 &= \frac{L_{23} L_{31}}{L_{12} + L_{23} + L_{31}}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

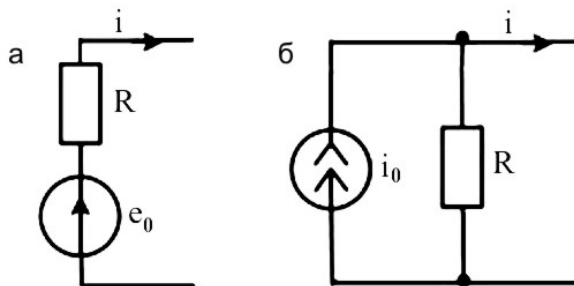
Формулы преобразования соединения емкостей звездой в соединение треугольником и обратно имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} C_{12} &= \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3}, & C_1 &= C_{12} + C_{31} + \frac{C_{12} C_{31}}{C_{23}}, \\ C_{23} &= \frac{C_2 C_3}{C_1 + C_2 + C_3}, & C_2 &= C_{12} + C_{23} + \frac{C_{12} C_{23}}{C_{31}}, \\ C_{31} &= \frac{C_3 C_1}{C_1 + C_2 + C_3}, & C_3 &= C_{23} + C_{31} + \frac{C_{32} C_{31}}{C_{12}}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Данные преобразования являются эквивалентными, поскольку токи и напряжения в остальной части цепи сохраняются неизменными.

### 1.3. Эквивалентные преобразования источников

Два абсолютно разных источника электрической энергии – источник напряжения и источник тока – считаются **эквивалентными**, если при замене одного источника другим токи и напряжения во внешней электрической цепи, с которой эти источники соединяются, остаются неизменными (рис. 1.3).



**Рис. 1.3.** Эквивалентные источники:  
а – напряжения, б – тока

Условием эквивалентности источников служит следующее соотношение между ЭДС источника напряжения и током источника тока:

$$i_0 = e_0 / R, \quad (1.14)$$

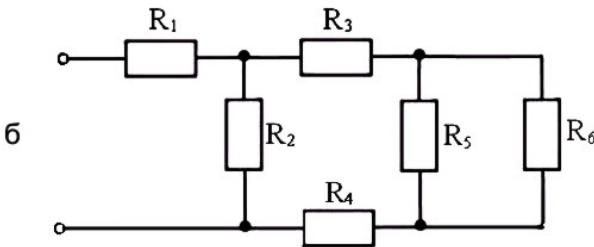
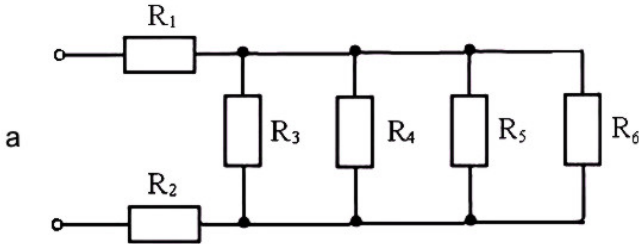
где  $R$  – внутреннее сопротивление источников.

Таким образом, источник напряжения с последовательно соединенным сопротивлением  $R$  можно заменить на источник тока с параллельно включенным сопротивлением той же величины  $R$ , если выполняется условие (1.14).

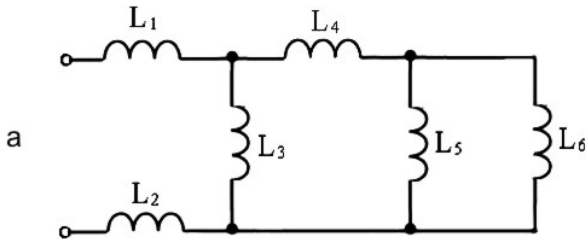
В случае сложной электрической цепи замена источника напряжения эквивалентным источником тока или наоборот может иногда упростить расчет.

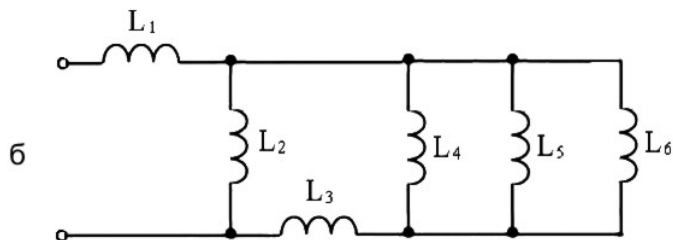
#### 1.4. Задачи

1.1. Для электрических цепей, схемы которых приведены ниже, рассчитайте значения эквивалентных сопротивлений, если:  $R_1 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = R_6 = 4 \text{ Ом}$ .

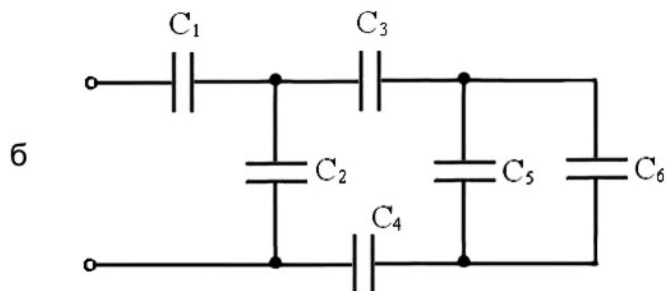
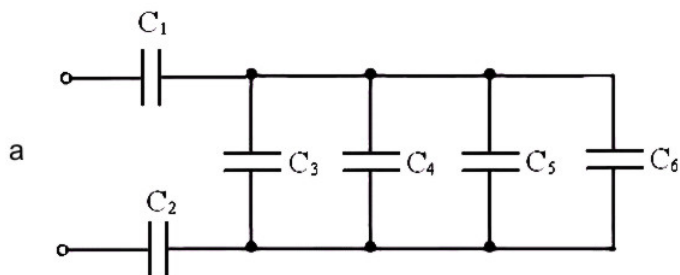


1.2. Для электрических цепей, схемы которых приведены ниже, рассчитайте значения эквивалентных индуктивностей, если:  $L_1 = 6 \text{ Гн}$ ,  $L_2 = 9 \text{ Гн}$ ,  $L_3 = 2 \text{ Гн}$ ,  $L_4 = 5 \text{ Гн}$ ,  $L_5 = L_6 = 10 \text{ Гн}$ .



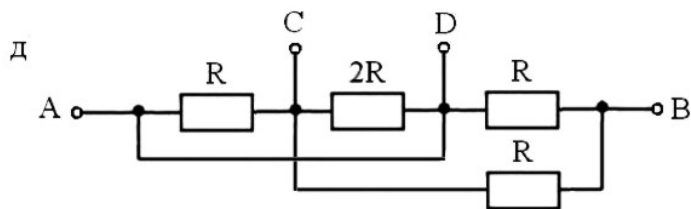
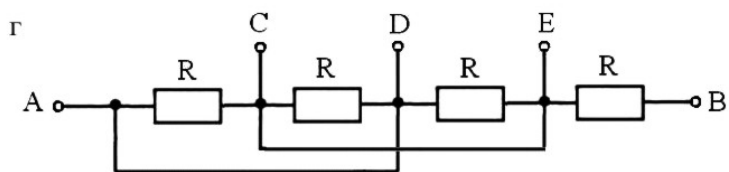
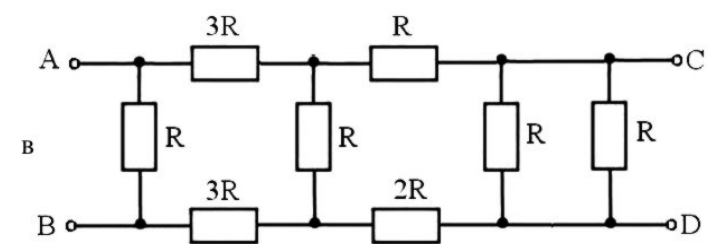
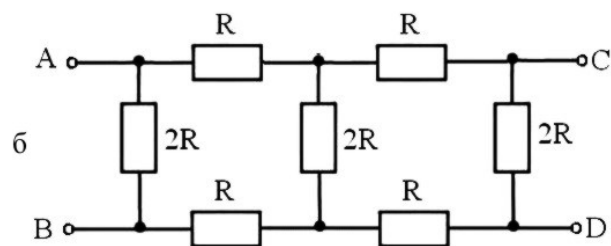
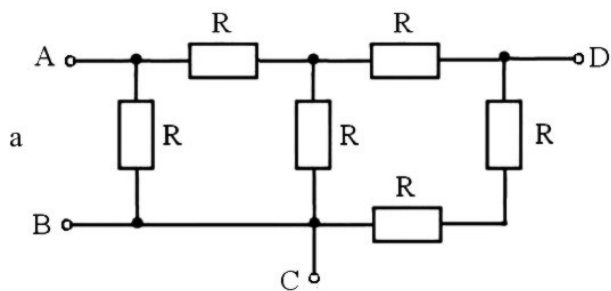


**1.3.** Для электрических цепей, схемы которых приведены ниже, рассчитайте значения эквивалентных емкостей, если:  $C_3 = 0,5$  мкФ,  $C_1 = C_4 = 1$  мкФ,  $C_2 = 2$  мкФ,  $C_5 = C_6 = 0,25$  мкФ,



**1.4.** Для электрических цепей, схемы которых приведены ниже, определите в общем виде значения эквивалентных сопротивлений относительно зажимов AB, AC, BC, BD, AD и CD.

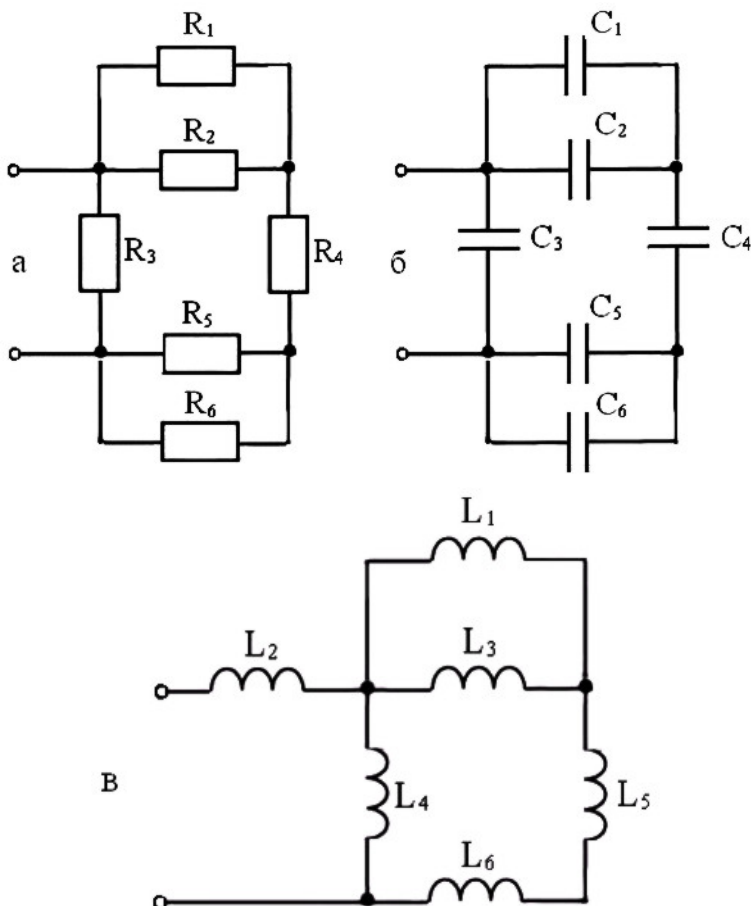




**1.5.** Для электрической цепи (г), схема которой приведена в предыдущем задании, определите в общем виде значения эквивалентных проводимостей относительно зажимов АЕ, ЕВ и DE.

### Контрольные задачи

Для электрических цепей, схемы которых приведены ниже, рассчитайте значения эквивалентных параметров. Значения параметров составляющих элементов приведены в табл. 1.1.



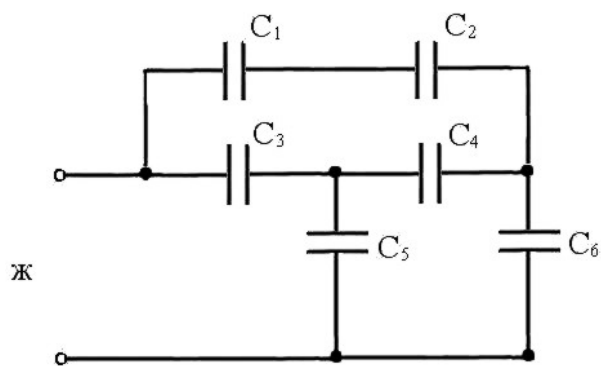
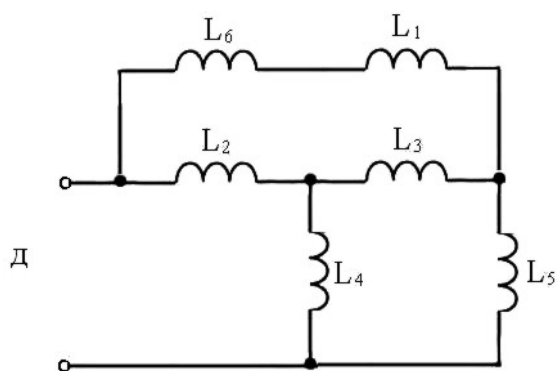
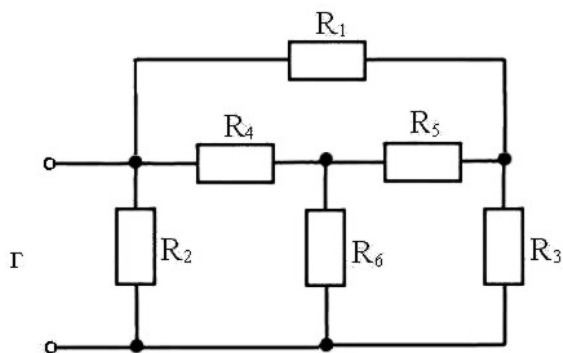


Таблица 1.1

Вариант	Рис.	Значения параметров элементов ветвей [Ом, Гн, мкФ]					
		1	2	3	4	5	6
1	а	2	6	9	6	2	6
2	б	6	6	12	9	6	6
3	в	4	4	10	6	9	1
4	г	2	2	2	3	3	3
5	д	2	2	2	2	1	1
6	ж	2	4	2	4	4	8
7	а	2	1	2	1	3	2
8	б	4	8	8	12	4	8
9	в	6	3	2	6	1	3
10	г	1	4	5	1	4	5
11	д	3	6	4	4	3	6
12	ж	5	6	5	6	10	10

### Контрольные вопросы

1. Какие соединения приемников электрической энергии называются последовательными, параллельными, смешанными?
2. Как определить общее сопротивление цепи при произвольном соединении приемников, если сопротивления участков известны?
3. В чем состоит особенность последовательного и параллельного соединения приемников?
4. Три резистора с сопротивлением  $R$  каждый соединены последовательно. Параллельно одному из резисторов включили резистор сопротивлением  $R/2$ . Как изменится эквивалентное сопротивление всей цепи?
5. Два резистора с сопротивлением  $R$  каждый соединены параллельно. Последовательно с одним из них включили резистор сопротивлением  $R$ . Как изменится эквивалентное сопротивление всей цепи?

## Глава 2

### ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

---

Если электрический ток постоянный, то отсутствует явление самоиндукции и напряжение на катушке индуктивности равно нулю. Постоянный ток через ветвь с емкостью не проходит, т.е. ветвь с конденсатором равносильна разомкнутой. Таким образом, в цепях установившегося постоянного тока из пассивных элементов остаются только сопротивления.

#### 2.1. Законы Кирхгофа

При расчете сложных электрических цепей, имеющих несколько точек разветвления, широко применяются законы Кирхгофа. Между этими точками (называемых узлами) находятся участки цепи, которые обладают определенными сопротивлениями и могут содержать источники электродвижущих сил (ЭДС).

Если в некоторой точке разветвленной цепи сходятся проводники, то сумма токов, втекающих в узел, должна равняться сумме токов, вытекающих из него. Это обусловлено тем, что в цепи постоянного тока потенциал любой точки, в частности узла, не должен изменяться со временем.

Если токи, приходящие к узлу, считать положительными, а уходящие – отрицательными, то **1-й закон Кирхгофа** можно формулировать так: *алгебраическая сумма токов, входящих в узел, равна нулю, т. е. для каждого узла соблюдается равенство*

$$\sum_{k=1}^n \pm I_k = 0, \quad (2.1)$$

где  $n$  – число токов, сходящихся в узле.

**2-й закон Кирхгофа** относится к любому замкнутому контуру разветвленной цепи и выражается следующим образом: *алгебраическая сумма ЭДС источников в любом замкнутом контуре электрической цепи равна алгебраической сумме падений напряжения на элементах этого контура:*

$$\sum_{k=1}^n \pm I_k R_k = \sum_{k=1}^m \pm E_k, \quad (2.2)$$

где  $n$  – число сопротивлений в замкнутом контуре,  $m$  – число источников ЭДС, входящих в контур.

При составлении уравнений на основании 2-го закона Кирхгофа необходимо строго придерживаться **правила знаков**, которое состоит в следующем. Произвольно выбрав направление обхода контура (по часовой либо против часовой стрелки), считают токи, идущие вдоль выбранного направления обхода, положительными, а токи, идущие против направления обхода, – отрицательными. Соответственно этому ЭДС источников, находящихся в рассматриваемом контуре, считаются *положительными*, если направление обхода совпадает с направлением действия сторонних сил внутри ЭДС и *отрицательными* – в противоположном случае.

При составлении системы уравнений следует учесть также, что если в сложной электрической цепи имеется  $m$  узлов, то на основании 1-го закона Кирхгофа можно записать уравнения только для  $(m - 1)$  узла. Уравнение для последнего  $m$ -го узла будет следствием предыдущих  $(m - 1)$  уравнений. Если в сложной электрической цепи имеется  $p$  ветвей (участков между двумя узлами), то число независимых уравнений на основании 2-го закона Кирхгофа равно  $p - (m - 1)$ . Остальные из этих уравнений являются следствием предыдущих. Выбирать контуры нужно таким образом, чтобы каждый новый контур содержал хотя бы один участок цепи, не входивший в уже выбранные контуры.

При решении уравнений для токов могут быть получены отрицательные значения, это означает, что фактически ток течет в направлении, обратном предположенному.

Порядок расчета цепей, основанный на использовании законов Кирхгофа, следующий:

- 1) выбирают положительные направления токов в ветвях;
- 2) составляют  $(m - 1)$  независимых уравнений по первому закону Кирхгофа;
- 3) выбирают направления обхода независимых контуров;

4) составляют  $p - (m - 1)$  независимых уравнений по второму закону Кирхгофа;

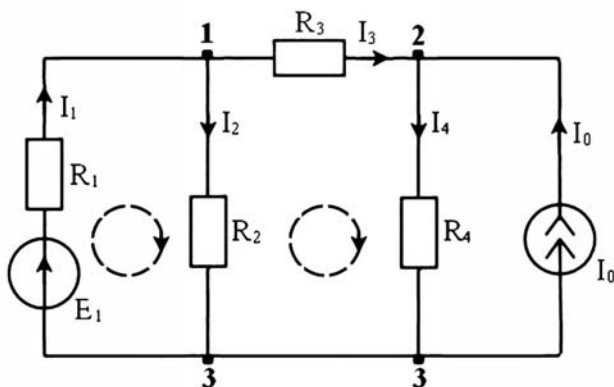
5) решают совместно полученную систему уравнений.

Пользуясь законами Кирхгофа, можно составить систему уравнений для нахождения токов в ветвях схемы электрической цепи, изображенной на рис. 2.1.

Для 1-го и 3-го узлов по первому закону Кирхгофа  $I_1 - I_2 - I_3 = 0$ ,  $-I_1 + I_2 + I_4 - I_0 = 0$ .

Для контура, образованного первой и второй ветвью по второму закону Кирхгофа:  $I_1 R_1 + I_2 R_2 = E_1$ .

Для контура, образованного второй, третьей и четвертой ветвями по второму закону Кирхгофа:  $I_3 R_3 + I_4 R_4 - I_2 R_2 = 0$ .



**Рис. 2.1.** Схема электрической цепи для изучения законов Кирхгофа

Применение законов Кирхгофа для расчета электрических цепей приводит к необходимости решения большого количества алгебраических уравнений и получению весьма громоздких выражений, особенно в случае сложных электрических цепей, т. е. разветвленных цепей, содержащих два и более источника питания, действующих в разных ветвях.

Для расчета сложных электрических цепей разработаны методы, позволяющие уменьшить число уравнений по сравнению с применением законов Кирхгофа. Это метод контурных токов, метод узловых потенциалов, метод эквивалентного генератора и др.

## 2.2. Метод контурных токов

При расчете электрической цепи этим методом составляют систему уравнений по второму закону Кирхгофа для всех независимых контуров, затем полагают, что в каждом независимом контуре протекает свой независимый контурный ток  $I_j^k$ , условное положительное направление которого совпадает с обходом этого контура. В общем случае система уравнений для цепи, имеющей  $n$ -независимых контуров, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} R_{11}I_1^k + R_{12}I_2^k + \dots + R_{1n}I_n^k &= E_1^k, \\ R_{21}I_1^k + R_{22}I_2^k + \dots + R_{2n}I_n^k &= E_2^k, \\ &\dots \\ R_{n1}I_1^k + R_{n2}I_2^k + \dots + R_{nn}I_n^k &= E_n^k, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $E_1^k, E_2^k, \dots, E_n^k$  – контурные ЭДС, равные алгебраической сумме ЭДС в соответствующих контурах, причем ЭДС считают положительными, если их условные положительные направления совпадают с направлением обхода контура, и отрицательными, если их направления противоположны.

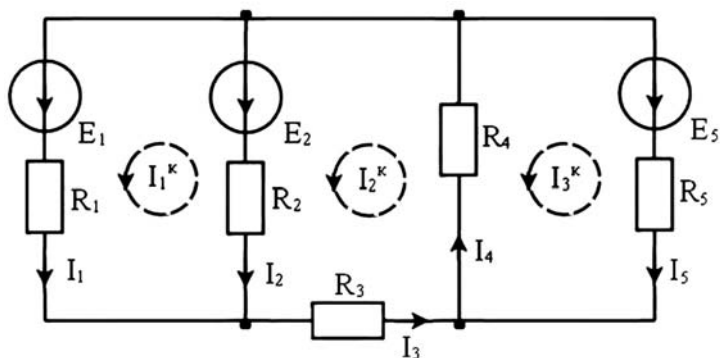
$R_{11}, R_{22}, \dots, R_{nn}$  – собственные сопротивления тех же контуров, равны сумме сопротивлений всех резисторов, принадлежащих соответствующему контуру.

$R_{12} = R_{21}, R_{23} = R_{32}, \dots$  – взаимные сопротивления контуров, равны сумме сопротивлений резисторов, принадлежащих одновременно двум контурам, номера которых указаны в индексе, при этом взаимные сопротивления надо принимать:

- положительными, если контурные токи в них направлены одинаково;
- отрицательными, если контурные токи в них направлены встречно;
- равными нулю, если контуры не имеют общих ветвей.

После решения системы уравнений (2.3) относительно контурных токов определяют токи в ветвях, предварительно задав их условные положительные направления. Если ветвь является общей для нескольких контуров, то ток в ней будет равен алгебраической сумме контурных токов, замыкающих эту ветвь.





**Рис. 2.2.** Схема электрической цепи для изучения метода контурных токов

Например, система уравнений для контурных токов линейной электрической цепи, изображенной на рис. 2.2, имеет следующий вид:

$$R_{11}I_1^k + R_{12}I_2^k + R_{13}I_3^k = E_1^k,$$

$$R_{21}I_1^k + R_{22}I_2^k + R_{23}I_3^k = E_2^k,$$

$$R_{31}I_1^k + R_{32}I_2^k + R_{33}I_3^k = E_3^k.$$

где

$$\begin{aligned} R_{11} &= R_1 + R_2, & R_{22} &= R_2 + R_3 + R_4, & R_{33} &= R_4 + R_5, \\ R_{12} &= R_{21} = -R_2, & R_{23} &= R_{32} = -R_4, & R_{13} &= R_{31} = 0, \\ E_1^k &= E_1 - E_2, & E_2^k &= E_2, & E_3^k &= -E_5. \end{aligned}$$

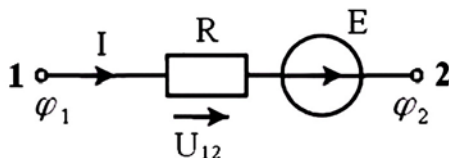
После нахождения контурных токов можно найти токи в ветвях:

$$I_1 = I_1^k, \quad I_2 = I_2^k - I_1^k, \quad I_3 = I_2^k, \quad I_4 = I_2^k - I_3^k, \quad I_5 = -I_3^k.$$

Если для токов в ветвях будут получены отрицательные значения, то это означает, что электрический ток течет в направлении, обратном предположенному.

### 2.3. Метод узловых потенциалов

Ток в любой ветви электрической цепи можно определить по известным потенциалам узлов, к которым она подключена, или напряжению между этими узлами. Согласно второму закону Кирхгофа для любой ветви электрической цепи, схема которой приведена на рис. 2.3, при заданных условных положительных направлениях ЭДС, тока и напряжения можно написать уравнение  $I \cdot R - U_{12} = E$ .



**Рис. 2.3.** Участок электрической цепи с источником ЭДС

Напряжение между узлами находится как разность потенциалов между этими узлами  $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$ .

Для ветви, изображенной на рис. 2.3, ток находится следующим образом:

$$I = \frac{E + U_{12}}{R} \text{ — закон Ома для ветви с источником ЭДС.}$$

Метод расчета электрических цепей, в котором в качестве неизвестных принимают потенциалы узлов схемы, называют **методом узловых потенциалов**. Метод более эффективен по сравнению с методом контурных токов в том случае, если число узлов в схеме меньше или равно числу независимых контуров, так как в любой электрической цепи потенциал одного из узлов можно принять равным 0, а число узлов, потенциалы которых следует определить относительно этого узла, станет равным  $(m - 1)$ , где  $m$  — число узлов в схеме.

Система уравнений для неизвестных потенциалов любой электрической цепи, имеющей  $m$  узлов, может быть получена из системы уравнений, составленной по первому закону Кирхгофа для  $(m - 1)$  узлов, если в ней токи в ветвях выразить через потенциалы узлов в соответствии с законом Ома для ветви с источником ЭДС.

В общем случае эта система имеет вид:

$$\begin{aligned} G_{11}\varphi_1 + G_{12}\varphi_2 + \dots + G_{1n}\varphi_n &= I_1^y, \\ G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 + \dots + G_{2n}\varphi_n &= I_2^y, \\ &\dots \\ G_{n1}\varphi_1 + G_{n2}\varphi_2 + \dots + G_{nn}\varphi_n &= I_n^y, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $n = m - 1$ ;  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  – потенциалы 1, 2, ...,  $n$  узлов относительно узла  $q$ , потенциал которого был принят равным 0.

$G_{kk}$  – сумма проводимостей всех ветвей, подключенных к  $k$ -му узлу,  $G_{kj} = G_{jk}$  – сумма проводимостей ветвей между узлами  $k$  и  $j$ , взятых со знаком «минус». Если между узлами  $k$  и  $j$  нет общих ветвей, то считают  $G_{kj} = G_{jk} = 0$ .

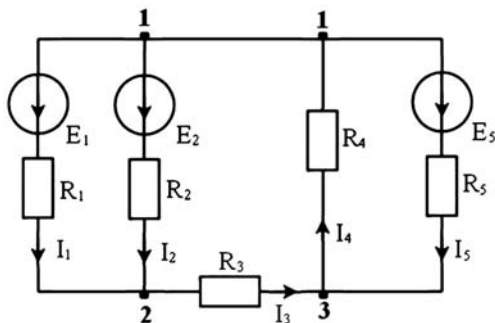
$I_k^y$  – узловой ток, равный алгебраической сумме токов всех ветвей, содержащих источники ЭДС и источники токов, подключенных к узлу  $k$ , причем каждый из них определяется по уравнению

$$I_k^y = \sum_j \pm \frac{E_j}{R_j} \pm I_j,$$

здесь токи, направленные к узлу, берутся со знаком «+», а от узла – со знаком «-».

После решения системы уравнений (2.4) относительно узловых потенциалов определяются напряжения между узлами и токи в ветвях.

Пользуясь методом узловых потенциалов, можно найти токи в ветвях схемы электрической цепи, которая изображена на рис. 2.4.



**Рис. 2.4.** Схема электрической цепи для изучения метода узловых потенциалов

Система уравнений для цепи, изображенной на рис. 2.4, если предположить  $\varphi_3 = 0$ , будет иметь следующий вид:

$$G_{11}\varphi_1 + G_{12}\varphi_2 = I_1^y,$$

$$G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 = I_2^y.$$

$$\text{где } G_{11} = G_1 + G_2 + G_4 + G_5 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5},$$

$$G_{22} = G_1 + G_2 + G_3 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}, \quad G_{12} = G_{21} = -G_1 - G_2 = -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2},$$

$$I_1^y = -\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} - \frac{E_5}{R_5}, \quad I_2^y = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}.$$

После нахождения потенциалов узлов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , можно найти напряжения между всеми узлами цепи и токи в ветвях.

$$U_{12} = U_1 = U_2 = \varphi_1 - \varphi_2, \quad U_{23} = U_3 = \varphi_2, \quad U_{31} = U_4 = -\varphi_1, \quad U_{13} = U_5 = \varphi_1,$$

$$I_1 = \frac{E_1 + U_1}{R_1}, \quad I_2 = \frac{E_2 + U_2}{R_2}, \quad I_3 = \frac{U_3}{R_3}, \quad I_4 = \frac{U_4}{R_4}, \quad I_5 = \frac{E_5 + U_5}{R_5}.$$

Метод узловых потенциалов особенно эффективен при расчете электрических цепей с двумя и большим количеством параллельных ветвей. При этом, если принять потенциал одного из узлов равным 0, например  $\varphi_2 = 0$ , то напряжение между узлами будет равно потенциалу

другого узла  $U_{12} = \varphi_1 = \frac{I_1^y}{G_{11}}$ . После этого определяют токи в ветвях

электрической цепи.

## 2.4. Метод эквивалентного генератора

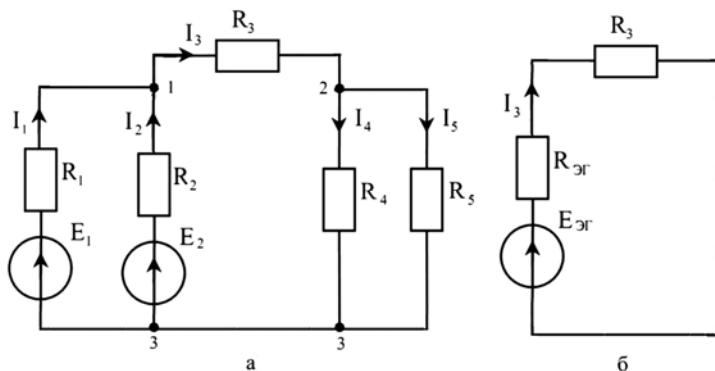
Метод эквивалентного генератора позволяет в ряде случаев относительно просто определить ток в какой-либо одной ветви сложной электрической цепи и исследовать поведение этой ветви при изменении ее сопротивления. Сущность метода заключается в том, что по отношению к исследуемой ветви сложная цепь заменяется эквивалентным источником (эквивалентным генератором – ЭГ) с ЭДС  $E_{ЭГ}$  и внутренним сопротивлением  $R_{ЭГ}$ .

Например, по отношению к ветви с резистором  $R_3$  схему электрической цепи, приведенную на рис. 2.5а, можно заменить эквивалентной (см. рис. 2.5б).

Если известны ЭДС и сопротивление эквивалентного генератора, то ток ветви может быть найден как

$$I_3 = \frac{E_{\text{ЭГ}}}{R_{\text{ЭГ}} + R_3}, \quad (2.5)$$

и задача сводится к определению значений  $E_{\text{ЭГ}}$  и  $R_{\text{ЭГ}}$ .



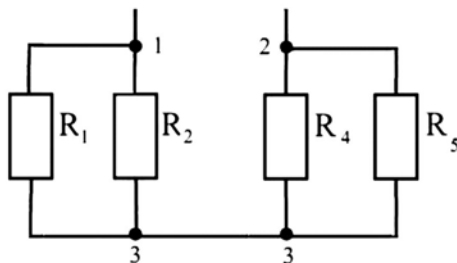
**Рис. 2.5.** Схема электрической цепи для изучения метода эквивалентного генератора:  
а – исходная схема, б – преобразованная схема

Уравнение (2.5) справедливо при любых значениях сопротивления резистора  $R_3$ . Так, при холостом ходе ЭГ, когда узлы 1 и 2 разомкнуты,  $I_3 = 0$  и  $E_{\text{ЭГ}} = U_{xx}$ , где  $U_{xx} = (\varphi_1 - \varphi_2)$  – напряжение холостого хода эквивалентного генератора,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – потенциалы узлов 1 и 2 в этом режиме.

При коротком замыкании ветви ( $E_3 = 0$ ) ток в ней равен  $I_{K3} = E_{\text{ЭГ}}/R_{\text{ЭГ}} = U_{xx}/R_{\text{ЭГ}}$ , откуда внутреннее сопротивление эквивалентного генератора  $R_{\text{ЭГ}} = U_{xx}/I_{K3}$ . Таким образом, для определения параметров эквивалентного генератора необходимо рассчитать любым из известных методов потенциалы узлов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  в режиме холостого хода эквивалентного генератора и ток короткого замыкания в исследуемой ветви.

Приведенный метод определения параметров эквивалентного генератора является наиболее универсальным, однако в ряде случаев

сопротивление  $R_{ЭГ}$  проще рассчитать как эквивалентное сопротивление между разомкнутыми узлами исследуемой ветви сложной электрической цепи в предположении, что все источники ЭДС в цепи замкнуты, как показано на рис. 2.6.



**Рис. 2.6.** Схема для расчета сопротивления эквивалентного генератора

На рис. 2.6 резисторы с сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$  соединены параллельно, поэтому, согласно (1.7), можно найти эквивалентное сопротивление  $R_{12}$  этих параллельных ветвей из соотношения  $\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$ . Откуда следует, что  $R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ . Резисторы

с сопротивлениями  $R_4$  и  $R_5$  соединены так же параллельно, поэтому аналогично можно получить  $R_{45} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}$ . Полученные сопротивления

$R_{12}$  и  $R_{45}$  соединены последовательно, поэтому, согласно (1.1), сопротивление эквивалентного генератора будет равно

$R_{ЭГ} = R_{12} + R_{45} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}$ . Используя соотношения для пре-

образования параллельно соединенных источников ЭДС (1.10), можно

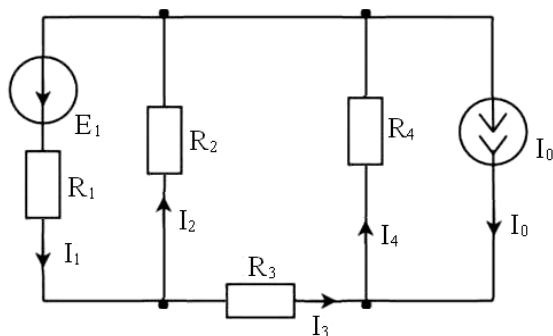
получить  $E_{ЭГ} = \left( \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} \right) \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ .

Данный метод позволяет определить ток в одной ветви сложной электрической цепи путем представления остальной части электрической цепи в виде эквивалентного генератора. Основное преимущество этого метода заключается в том, что он позволяет исследовать поведение этой ветви при изменении ее сопротивления.

## 2.5. Принцип и метод наложения

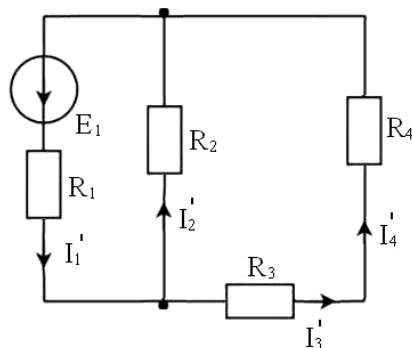
Для линейных цепей любой ток или напряжение на участке цепи могут быть определены суммой составляющих, рассчитанных отдельно от действия каждого источника или групп источников. Такое свойство линейных цепей называется **принципом наложения**. Метод расчета токов и напряжений в линейных электрических цепях, основанный на этом принципе, называется **методом наложения**.

Например, для электрической цепи, изображенной на рис. 2.7, токи в ветвях находят следующим образом.



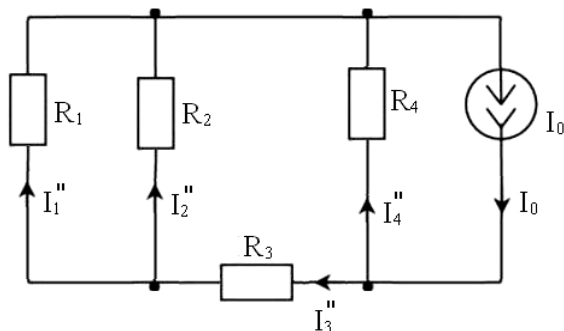
**Рис. 2.7.** Схема электрической цепи с двумя источниками

Сначала в электрической цепи, изображенной на рис. 2.7, нужно оставить только один источник, например источник ЭДС, и найти токи в ветвях, пометив их штрихом (см. рис. 2.8).



**Рис. 2.8.** Схема электрической цепи с одним источником ЭДС

Затем в электрической цепи, изображенной на рис. 2.7, нужно оставить другой источник (источник тока) и найти токи в ветвях, пометив их двумя штрихами (см. рис. 2.9).



**Рис. 2.9.** Схема электрической цепи с одним источником тока

Теперь можно найти токи в ветвях электрической цепи, содержащей два источника, как алгебраическую сумму частичных токов в соответствующих ветвях. За положительное направление тока в ветви выбирается его направление в схеме с двумя источниками.

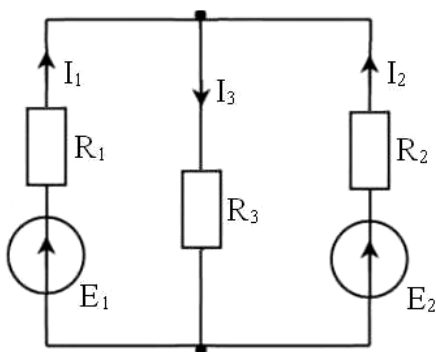
$$I_1 = I_1' - I_1'', \quad I_2 = I_2' + I_2'', \quad I_3 = I_3' - I_3'', \quad I_4 = I_4' + I_4''.$$

Другими словами, частичный ток, совпадающий по направлению с искомым, считается положительным, а несовпадающий – отрицательным.

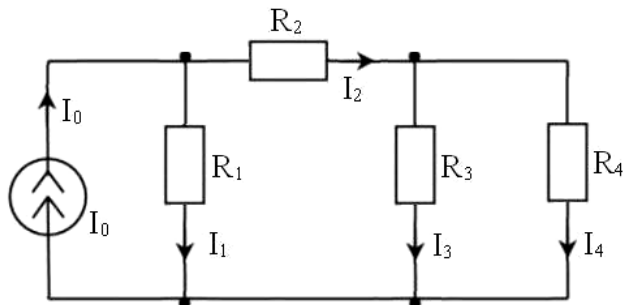


## 2.6. Задачи

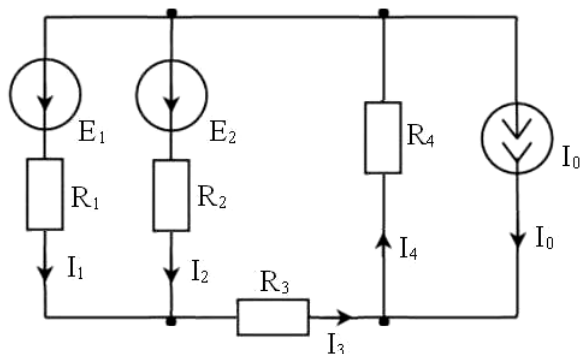
**2.1.** Для электрической цепи, схема которой приведена ниже, рассчитайте значения токов в ветвях, используя законы Кирхгофа, метод контурных токов, метод узловых потенциалов, метод наложения и метод эквивалентного генератора. Параметры элементов схемы имеют следующие значения:  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = R_3 = 2 \text{ Ом}$ ,  $E_1 = 20 \text{ В}$ ,  $E_2 = 10 \text{ В}$ .



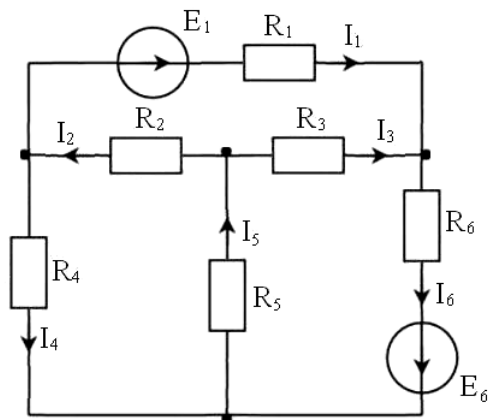
**2.2.** Для электрической цепи, схема которой приведена ниже, рассчитайте значения токов в ветвях, используя законы Кирхгофа, метод контурных токов, метод узловых потенциалов и метод эквивалентного генератора. Параметры элементов схемы имеют следующие значения:  $R_1 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = R_3 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 10 \text{ Ом}$ ,  $I_0 = 23 \text{ А}$ .



**2.3.** Для электрической цепи, схема которой приведена ниже, рассчитайте значения токов в ветвях, используя законы Кирхгофа, метод контурных токов, метод узловых потенциалов, метод наложения и метод эквивалентного генератора. Параметры элементов схемы имеют следующие значения:  $R_1 = R_3 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = R_4 = 2 \text{ Ом}$ ,  $E_1 = E_2 = 9,5 \text{ В}$ ,  $I_0 = 2 \text{ А}$ .

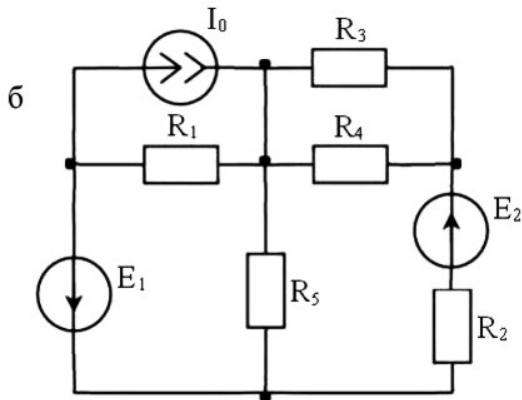
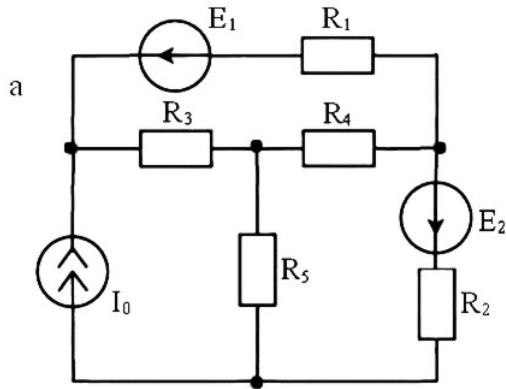


**2.4.** Для электрической цепи, схема которой приведена ниже, рассчитайте значения токов в ветвях, используя законы Кирхгофа, метод контурных токов, метод узловых потенциалов и метод эквивалентного генератора. Параметры элементов схемы имеют следующие значения:  $R_1 = R_2 = R_5 = R_6 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = R_4 = 2 \text{ Ом}$ ,  $E_1 = 4 \text{ В}$ ,  $E_6 = 8 \text{ В}$ .



### Контрольные задачи

1. Для электрических цепей, схемы которых приведены ниже, рассчитайте значения токов в ветвях  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$ ,  $I_5$ , используя законы Кирхгофа, метод контурных токов и метод узловых потенциалов. Значения параметров элементов приведены в табл. 2.1.



2. Для электрических цепей из предыдущего задания рассчитайте методом эквивалентного генератора значения тока ветви  $I_2$ .

Таблица 2.1

Вариант	Рис.	Сопротивления, Ом					Источники		
		$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$	$E_1, В$	$E_2, В$	$I_0, А$
1	а	2	1	4	5	4	2	1	4
2	б	2	1	4	5	4	2	1	4
3	а	1	2	5	1	2	1	2	1
4	б	1	2	5	1	2	1	2	1
5	а	4	5	2	2	1	2	5	2
6	б	4	5	2	2	1	2	5	2
7	а	1	1	2	2	5	1	4	5
8	б	1	1	2	2	5	1	4	5
9	а	5	5	10	10	2	15	10	5
10	б	5	5	10	10	2	15	10	5
11	а	1	4	2	2	1	2	4	2
12	б	1	4	2	2	1	2	4	2

### Контрольные вопросы

1. Какие существуют методы расчета сложных электрических цепей? Какие электрические цепи считаются сложными?
2. Сформулируйте и запишите законы Кирхгофа.
3. Почему результат расчета электрической цепи не зависит от выбора направлений токов?
4. Когда наиболее удобно воспользоваться для исследования линейной цепи методом узловых потенциалов, а когда методом контурных токов?
5. Как определяется напряжение между двумя точками электрической цепи?
6. В чем заключается метод наложения?
7. Когда наиболее удобно воспользоваться методом эквивалентного генератора для исследования линейной цепи?

## Глава 3

### ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

---

В настоящее время переменный ток получил на практике гораздо большее применение, чем постоянный. Это объясняется тем, что синхронные генераторы могут быть выполнены на значительно большие мощности и более высокие напряжения, чем генераторы постоянного тока. К тому же переменный ток позволяет легко изменять величину напряжения с помощью трансформатора, что необходимо при передаче электроэнергии на большие расстояния. В настоящее время практически вся вырабатываемая электроэнергия является энергией синусоидального тока. Только лишь некоторую долю электроэнергии преобразуют в энергию постоянного тока.

В электрических цепях синусоидального тока присутствует источник синусоидального напряжения или тока. Может быть и несколько источников, но обязательно одинаковой частоты.

Расчеты электрических цепей синусоидального тока можно проводить как по мгновенным значениям напряжения и тока, так и по их комплексным значениям.

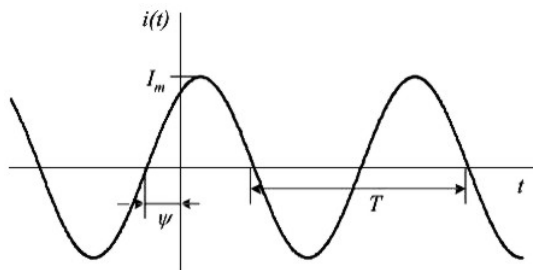
#### 3.1. Расчет электрических цепей синусоидального тока по мгновенным значениям

В электрических цепях синусоидального тока напряжения и токи всех ветвей изменяются во времени по синусоидальному закону. Общий вид этого закона для силы тока имеет вид (см. рис. 3.1):

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

где  $i$  – мгновенное значение тока в момент времени  $t$ , амплитуда  $I_m$  равна максимальному значению силы тока,  $\omega$  – угловая частота,  $\psi_i$  – начальная фаза.

Период  $T$  синусоидальной функции определяется частотой синусоидальных колебаний  $f = 1/T$ . Угловая частота связана с циклической частотой  $\omega = 2\pi f$ , начальная фаза  $\psi_i$  определяет сдвиг синусоиды относительно оси ординат.



**Рис. 3.1.** Зависимость мгновенного значения силы тока от времени

Для определения мгновенных значений силы тока или напряжения какой-либо ветви необходимо знать три параметра: частоту, амплитуду и начальную фазу.

Часто для характеристики тока или напряжения используют понятие действующего значения. Действующим значением силы переменного тока называют величину постоянного тока, действие которого произведёт такую же работу, что и рассматриваемый переменный ток за время одного периода. Его величину находят как среднеквадратическое значение за период. Например, для силы тока:

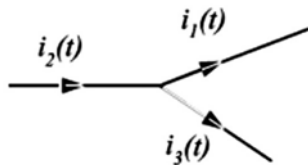
$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt}.$$

При синусоидальной зависимости от времени действующее значение оказывается в  $\sqrt{2}$  раз меньше амплитудного

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m \sin(\omega t + \psi_i) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

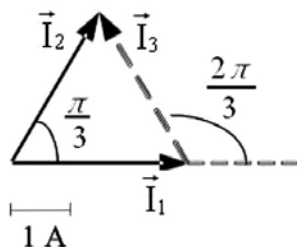
Для решения несложных задач используются векторные диаграммы токов и напряжений. На них токи и напряжения представляются в виде векторов, длина которых равна действующему значению, а направление определяется начальной фазой. Векторы напряжений или токов можно складывать и вычитать.

Например, на рис. 3.2. показан участок цепи, для которого известны мгновенные значения токов  $i_1(t) = 3\sin(\omega t)$ ,  $i_2(t) = 3\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$  и нужно найти мгновенное значение тока  $i_3(t)$ .



**Рис. 3.2.** Участок электрической цепи

По первому закону Кирхгофа алгебраическая сумма токов в узле равна нулю. Ток  $i_2(t)$  втекает в узел, а остальные вытекают, поэтому  $i_2(t) = i_1(t) + i_3(t)$ . Представим токи в виде векторов с учетом их действующих значений и начальных фаз (рис. 3.3).

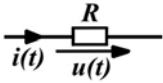
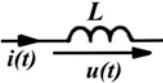
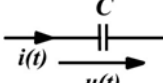


**Рис. 3.3.** Векторная диаграмма токов

Вектор  $\vec{I}_1$  направлен вдоль горизонтальной оси, поскольку начальная фаза тока  $i_1(t)$  равна нулю, а его длина равна  $\frac{3}{\sqrt{2}}$ . Вектор  $\vec{I}_2$  направлен под углом  $\pi/3$  к горизонтали, а его длина равна длине вектора  $\vec{I}_1$ . Для того, чтобы выполнялось векторное соотношение  $\vec{I}_2 = \vec{I}_1 + \vec{I}_3$ , эти векторы должны составлять треугольник. Поскольку длины векторов  $\vec{I}_1$ ,  $\vec{I}_2$  равны, а угол между ними  $\pi/3$ , то треугольник на рис. 3.3 равносторонний. Исходя из этого, можно определить длину вектора  $\vec{I}_3$  и его направление. Угол между горизонталью и вектором  $\vec{I}_3$  равен  $2\pi/3$ . Таким образом, стали известны амплитуда и начальная фаза, следовательно, можно записать мгновенное значение  $i_3(t) = 3\sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$ .

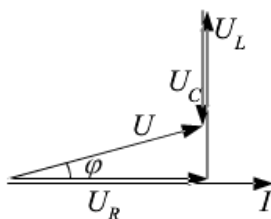
Мгновенные значения силы тока и напряжения для пассивных элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$  электрических цепей синусоидального тока связаны между собой следующим образом (см. табл. 3.1).

Таблица 3.1

		
$u(t) = R \cdot i(t),$ $i(t) = \frac{u(t)}{R}$	$u(t) = L \frac{di(t)}{dt},$ $i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(t) dt + i(0)$	$u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + u(0),$ $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$

Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из последовательно соединенных  $R$ ,  $L$  и  $C$  элементов. Пусть напряжение источника изменяется по синусоидальному закону. Найдём мгновенные значения силы тока в цепи и напряжений на элементах, если известны частота и амплитуда напряжения источника.

Поскольку элементы  $R$ ,  $L$  и  $C$  соединены последовательно, то через них протекает один и тот же ток. Поэтому за ноль фазы удобно принять фазу силы тока, тогда мгновенное значение напряжения источника будет изменяться по закону  $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ , а векторная диаграмма тока и напряжений будет иметь следующий вид (см. рис. 3.4):



**Рис. 3.4.** Векторная диаграмма тока и напряжений

Полное сопротивление электрической цепи, состоящей из последовательно соединенных  $R$ ,  $L$  и  $C$  элементов, будет равно:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2},$$

где  $X_L = \omega L$  – реактивное индуктивное сопротивление;



$X_C = \frac{1}{\omega C}$  – реактивное емкостное сопротивление.

Действующее значение напряжения источника находится через значение его амплитуды  $U = U_m / \sqrt{2}$ . Отсюда можно найти и действующее значение силы тока  $I = U / Z$ . Далее находятся действующие значения напряжений на элементах:  $U_L = \omega LI$ ,  $U_C = \frac{I}{\omega C}$  и  $U_R = RI$ .

Если известны частота и параметры элементов схемы  $R$ ,  $L$  и  $C$ , то можно найти сдвиг фаз между током и напряжением источника:

$$\varphi = \arctg\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right).$$

Таким образом, исходя из вышеуказанных соображений, можно записать выражения для мгновенных значений силы тока и напряжений на элементах цепи:

$$i(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t), \quad u_R(t) = U_R\sqrt{2} \sin(\omega t), \\ u_L(t) = U_L\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad u_C(t) = U_C\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Синусоидальные функции хоть и очень просты, но их графическое изображение и операции с ними трудоемки и недостаточно точны. Существенного упрощения можно достичь, если перейти к комплексной форме записи.

### 3.2. Расчет электрических цепей синусоидального тока по комплексным значениям

Для упрощения расчетов в сложных электрических цепях удобнее использовать комплексные значения функций. Например, комплексное значение напряжения имеет вид:

$$\dot{u} = U_m e^{j(\omega t + \psi_u)}, \quad (3.3)$$

где  $j$  – мнимая единица.

Переход от комплексного к мгновенному значению осуществляется при помощи операции вычисления мнимой части комплексной величины:

$$u(t) = \text{Im}\left(U_m e^{j(\omega t + \psi_u)}\right) = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Применение комплексной формы записи напряжений и токов часто оказывается удобнее по сравнению с применением мгновенных значений. Так, например, дифференцирование и интегрирование комплексного напряжения сводится к умножению или делению его комплексной амплитуды на оператор поворота  $j\omega = \omega e^{j\pi/2}$ , так как

$$\frac{d}{dt}\dot{u} = \frac{d}{dt}U_m e^{j(\omega t + \psi_u)} = j\omega U_m e^{j(\omega t + \psi_u)} = j\omega \dot{u},$$

$$\int \dot{u}(t)dt = \int U_m e^{j(\omega t + \psi_u)}dt = U_m e^{j(\omega t + \psi_u)} / j\omega = \frac{\dot{u}}{j\omega}.$$

Удобно использовать в расчетах комплексные действующие напряжения и токи. Они представляют собой комплексные числа, модуль которых равен действующему значению, а аргумент – начальной фазе, соответственно, напряжения или тока.

Различают показательную, тригонометрическую и алгебраическую формы записи комплексных чисел. Например, комплексное действующее напряжение можно записать соответственно:

$$\dot{U} = U e^{j\psi_u} = U (\cos \psi_u + j \sin \psi_u) = U_a + jU_p,$$

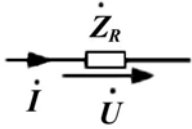
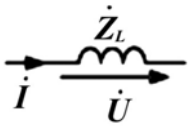
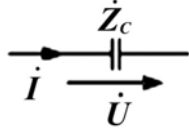
где  $U_a$  – активная составляющая,  $U_p$  – реактивная составляющая.

Переход из алгебраической формы записи в показательную осуществляется следующим образом:

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2}, \quad \psi_u = \arctg \frac{U_p}{U_a}.$$

В табл. 3.2 представлены комплексные значения сопротивлений  $R$ ,  $L$  и  $C$  элементов.

Таблица 3.2

		
$\dot{Z}_R = R = R \cdot e^{j0}$	$\dot{Z}_L = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}}$	$\dot{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}$

Если на участке электрической цепи из последовательно соединенных  $R$ ,  $L$  и  $C$  элементов действует источник синусоидального напряжения, то комплексное сопротивление этого участка будет равно сумме комплексных сопротивлений элементов  $\dot{Z} = \dot{Z}_R + \dot{Z}_L + \dot{Z}_C$ . Подставляя их значения (см. табл. 3.2), получим

$$\dot{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из последовательно соединенных элементов  $R = 3$  Ом,  $L = 44,5$  мГн,  $C = 177$  мкФ. Найдем комплексные действующие значения силы тока в цепи и напряжений на элементах, если цепь подключена к источнику синусоидального напряжения с параметрами  $\dot{U} = 100$  В,  $f = 50$  Гц.

В начале найдем реактивное сопротивление индуктивности

$$X_L = 2\pi fL = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 44,5 \cdot 10^{-3} = 14 \text{ Ом}$$

и реактивное сопротивление емкости

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 177 \cdot 10^{-6}} = 18 \text{ Ом},$$

а затем полное комплексное сопротивление цепи:

$$\dot{Z} = R + j(X_L - X_C) = 3 + j(14 - 18) = 3 - j4.$$

Перейдем от алгебраической формы записи к показательной

$$\dot{Z} = \sqrt{3^2 + 4^2} e^{-j \arctg \frac{4}{3}} = 5e^{-j53^\circ} \text{ Ом}$$

и рассчитаем комплекс действующего значения силы тока

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}} = \frac{100}{5e^{-j53^\circ}} = 20e^{j53^\circ} \text{ А}.$$

Далее можно рассчитать комплексные действующие значения падения напряжений на элементах:

$$\dot{U}_R = \dot{I}R = 20e^{j53^\circ} \cdot 3 = 60e^{j53^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{U}_L = \dot{I} \cdot jX_L = 20e^{j53^\circ} \cdot 14 \cdot e^{j90^\circ} = 280e^{j143^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{U}_C = \dot{I} \cdot (-jX_C) = 20e^{j53^\circ} \cdot 18 \cdot e^{-j90^\circ} = 360e^{-j37^\circ} \text{ В}.$$

При необходимости всегда можно перейти к мгновенным значениям силы тока и напряжений:

$$i(t) = 20\sqrt{2} \sin(314t + 53^\circ), \quad u_R(t) = 60\sqrt{2} \sin(314t + 53^\circ), \\ u_L(t) = 280\sqrt{2} \sin(314t + 143^\circ), \quad u_C(t) = 360\sqrt{2} \sin(314t - 37^\circ).$$

**Комплекс полной мощности** электрической цепи синусоидального тока определяется произведением комплексного действующего значения напряжения и сопряженного комплексного действующего значения тока

$$\dot{S} = \dot{U} \cdot \dot{I}^* = UIe^{\pm j\varphi} = UI \cos(\pm\varphi) + jUI \sin(\pm\varphi) = P \pm jQ.$$

То есть вещественная часть комплекса полной мощности – это активная мощность  $P$ , а коэффициент при мнимой единице – реактивная мощность  $Q$ . Полная мощность цепи учитывает активную и реактивную мощности  $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = UI$ .

Активная мощность всегда положительна, она характеризует необратимое преобразование электрической энергии в другой вид энергии, например, в тепловую, световую и механическую. Реактивная мощность расходуется на создание магнитного поля в индуктивности или электрического поля в емкости. Реактивная мощность в цепи, имеющей индуктивный характер, – положительна, а в цепи с емкостным характером – отрицательна. Энергия, накопленная в емкости или в индуктивности, периодически возвращается в электрическую цепь. Полная мощность характеризует предельные возможности источника энергии.

Определим характер нагрузки, полную, активную и реактивную мощности цепи, в которой мгновенные значения напряжения и тока составляют  $u(t) = 282 \sin(\omega t + 60^\circ)$ ,  $i(t) = 141 \sin(\omega t + 30^\circ)$ .

Поскольку угол начальной фазы напряжения  $\psi_u = 60^\circ$  больше, чем тока  $\psi_i = 30^\circ$ , то напряжение опережает по фазе ток на угол  $\varphi = \psi_u - \psi_i = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$  и нагрузка имеет активно-индуктивный характер.

Полная мощность  $S = UI = \frac{U_m I_m}{2} = \frac{282 \cdot 141}{2} = 20000 \text{ В} \cdot \text{А}$ . Активная мощность цепи  $P = S \cos\varphi = 20000 \cos 30^\circ = 17600 \text{ Вт}$ . Реактивная мощность цепи  $Q = S \sin\varphi = 20000 \sin 30^\circ = 10000 \text{ ВАр}$ .

### 3.3. Резонансные электрические цепи

Рассмотрим участок электрической цепи синусоидального тока, содержащей  $R$ ,  $L$  и  $C$  элементы, относительно двух выделенных зажимов. В том случае, когда ток и напряжение на входе схемы совпадают по фазе, в цепи имеет место **резонанс**. В этом случае входные комплексные сопротивление и проводимость цепи являются действительными числами, а их мнимая часть равна нулю. Если при этом реактивные элементы в цепи соединены последовательно, то в электрической цепи наблюдается *резонанс напряжений*, а если реактивные элементы в цепи соединены параллельно, – *резонанс токов*.

Рассмотрим **последовательный колебательный контур**, т. е. участок электрической цепи синусоидального тока, состоящей из последовательно соединенных элементов: резистора, индуктивности и емкости. Комплексное полное сопротивление этого участка будет равно

но  $\dot{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ . Резонанс напряжений будет в том случае,

когда мнимая часть комплексного сопротивления будет равна нулю, т. е. при резонансной частоте  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . В результате на резонансной

частоте электрический ток в цепи достигает своего максимального значения и совпадает по фазе с напряжением источника. При этом напряжения индуктивности и емкости равны по величине и находятся в противофазе, но каждое в отдельности при выполнении условия

$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \gg R$  может во много раз превышать напряжение на зажимах цепи.

Если рассмотреть **параллельный колебательный контур**, т. е. участок электрической цепи синусоидального тока, состоящей из параллельно соединенных элементов: резистора, индуктивности и емкости, – то полная комплексная проводимость этого участка будет равна

$\dot{Y} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$ . Резонанс токов будет в том случае, когда мни-

мая часть комплексной проводимости будет равна нулю, т. е. при резонансной частоте  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . В результате на резонансной частоте

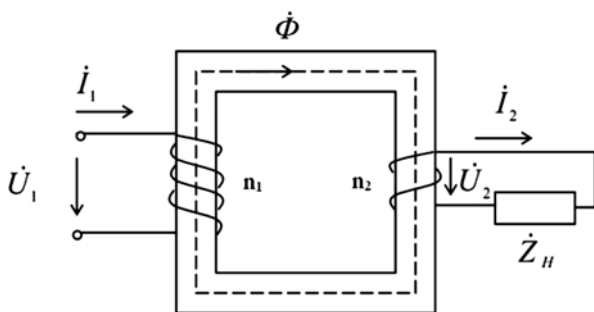
электрический ток в цепи совпадает по фазе с напряжением источника. При этом сила тока на индуктивности равна по величине силе тока на емкости, но находятся в противофазе, и каждая в отдельности при выполнении условия  $\frac{1}{\omega_0 L} = \omega_0 C \gg G$  может во много раз превышать силу общего тока в цепи.

Электрический резонанс можно получить путем изменения одной из трех величин  $L$ ,  $C$  или  $f$  при постоянных двух других. При некоторых условиях в подобных цепях резонанс может возникать и при одновременном изменении указанных параметров.

### 3.4. Однофазный трансформатор

**Трансформатором** называется статическое электромагнитное устройство, в котором переменный ток одного напряжения преобразуется в переменный ток той же частоты, но другого напряжения.

Трансформатор состоит из стального сердечника, на котором (рис. 3.5) в простейшем случае расположены две обмотки, выполненные из изолированного провода. К первичной обмотке подводится напряжение источника  $\dot{U}_1$ . Со вторичной обмотки снимается напряжение  $\dot{U}_2$ , которое подводится к потребителю электрической энергии. Трансформатор может иметь не одну, а две или несколько вторичных обмоток, к каждой из которых подключается свой потребитель электрической энергии.



**Рис. 3.5.** Схема, поясняющая работу трансформатора

Принцип работы трансформатора основан на электромагнитной индукции, т. е. в наведении переменным током, протекающим через

одну катушку индуктивности, ЭДС взаимной индукции в других, индуктивно связанных катушках. При протекании переменного тока по первичной катушке в стальном сердечнике возникает переменный магнитный поток  $\dot{\Phi}$  (рис. 3.5). Этот магнитный поток, пронизывая витки первичной и вторичной катушек, индуцирует в них ЭДС  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$ . Соотношение ЭДС  $E_1$  и  $E_2$  обмоток трансформатора зависит соотношения чисел витков первичной и вторичной обмоток  $n_1$  и  $n_2$ .

Отношение ЭДС первичной обмотки к ЭДС вторичной обмотки называется **коэффициентом трансформации** трансформатора:

$$n = \frac{E_1}{E_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Если необходимо повысить напряжение источника питания, то число витков вторичной обмотки делают больше числа витков первичной обмотки ( $n_2 > n_1$ ). Такой трансформатор называют **повышающим**. Если напряжение надо понизить, то делают наоборот ( $n_1 > n_2$ ). В этом случае трансформатор будет **понижающим**. Если требуется несколько различных значений вторичного напряжения, то на тот же магнитопровод наматывают несколько вторичных обмоток с различным числом витков.

При передаче энергии из первичной обмотки во вторичную возникают электрические потери мощности. Отношение отдаваемой мощности  $P_2$  к мощности  $P_1$ , поступающей из сети в первичную обмотку, называют **коэффициентом полезного действия (КПД)** трансформатора  $\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_1 - \Delta P}{P_1}$ , где  $\Delta P$  – потери энергии трансформатора.

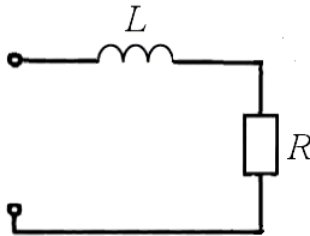
Если пренебречь потерями энергии, то можно получить уравнение идеального трансформатора:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} = n.$$

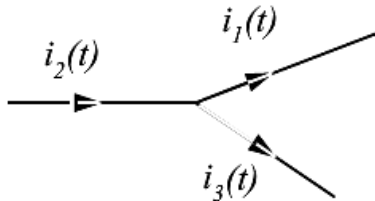
То есть при понижении (или повышении) в  $n$  раз напряжения на вторичной обмотке увеличивается (или уменьшается) во столько же ( $n$ ) раз ток вторичной цепи.

### 3.5. Задачи

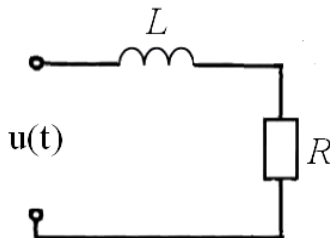
**3.1.** Полное сопротивление изображенной электрической цепи  $Z$  при частоте 100 Гц равно 5 Ом. Чему оно будет равно при частоте 150 Гц, если  $R = 3$  Ом?



**3.2.** Известны мгновенные значения тока  $i_1(t) = 4 \sin(\omega t)$  А,  $i_2(t) = 3 \cos(\omega t)$  А. Найдите мгновенное значение силы тока  $i_3(t)$ .



**3.3.** Найдите мгновенное значение приложенного к электрической цепи напряжения, если  $R = 20$  Ом,  $L = 15$  мГн,  $i(t) = 2 \sin(10000t)$  А.

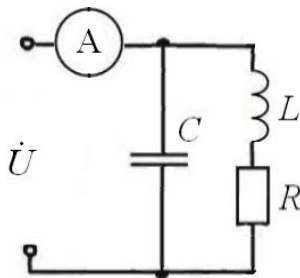




**3.4.** Комплексная проводимость равна  $0,2 - j0,2$  См. Вычислите активное и реактивное сопротивление.

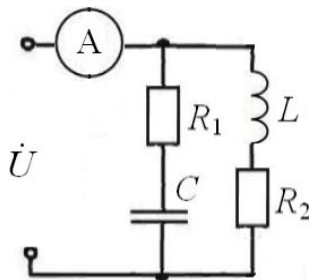
**3.5.** Комплексное сопротивление равно  $3 + j4$  Ом. Вычислите активную и реактивную проводимость.

**3.6.** Найдите показания амперметра в электрической цепи, если  $R = 7$  Ом,  $X_L = 7$  Ом,  $X_C = 20$  Ом,  $\dot{U} = 10$  В.



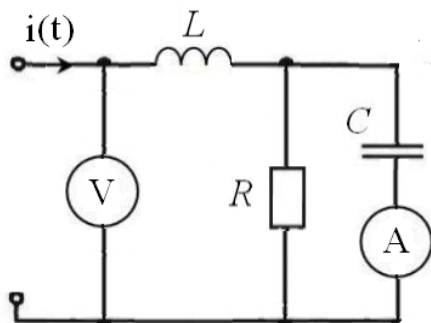
**3.7.** Определите значение реактивного индуктивного сопротивления в электрической цепи из предыдущего задания, если в цепи резонанс,  $R = 20$  Ом,  $X_C = 40$  Ом.

**3.8.** Найдите показания амперметра в электрической цепи, если  $R_1 = 20$  Ом,  $R_2 = 40$  Ом,  $X_L = 10$  Ом,  $X_C = 30$  Ом,  $\dot{U} = 20$  В.



**3.9.** Определите угловую частоту и действующие значения напряжения и тока ( $U$  и  $I$ ) на участке электрической цепи из последовательно соединенных активного сопротивления и емкости, если  $R = 40$  Ом,  $C = 4,17$  мкФ, полная комплексная мощность  $\dot{S} = (100 - j60)$  ВА.

**3.10.** Определите показания приборов в электрической цепи, если  $R = 40 \text{ Ом}$ ,  $X_L = 60 \text{ Ом}$ ,  $X_C = 40 \text{ Ом}$ ,  $i(t) = 2\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t - 45^\circ) \text{ А}$ .



**3.11.** Мощность, потребляемая трансформатором из сети при активной нагрузке  $P_1 = 500 \text{ Вт}$ , напряжение сети  $U_1 = 100 \text{ В}$ , коэффициент трансформации трансформатора равен 10. Определите ток нагрузки.

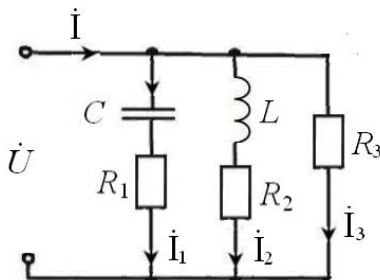
**3.12.** Первичное напряжение трансформатора  $U_1 = 230 \text{ В}$ , вторичное  $U_2 = 5770 \text{ В}$ . Для определения чисел витков первичной и вторичной обмоток трансформатора на сердечнике намотали дополнительную обмотку с числом витков 20. В режиме холостого хода напряжение на зажимах дополнительной обмотки  $U_0 = 140 \text{ В}$ . Определите число витков первичной и вторичной обмоток, а также коэффициент трансформации.

**3.13.** Напряжение на входе однофазного трансформатора  $U_1 = 100 \text{ В}$ , ток в первичной цепи  $I_1 = 10 \text{ А}$ , коэффициент полезного действия 0,9. Вольтметр во вторичной цепи показывает напряжение  $U_2 = 450 \text{ В}$ . Определите показания амперметра во вторичной цепи и сопротивление нагрузки.

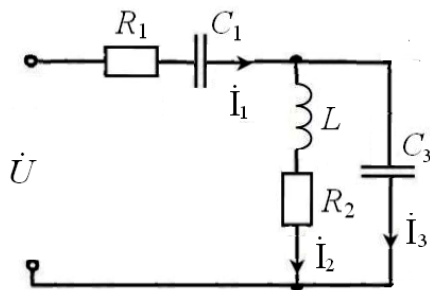
**3.14.** Заданы в комплексной форме напряжение на ветви  $\dot{U} = 30 \text{ В}$  и ток  $\dot{I} = 6 + j0,9 \text{ А}$ , проходящий через эту ветвь. Определите комплексное сопротивление и комплексную проводимость, постройте векторную диаграмму.

**3.15.** К электрической цепи, состоящей из последовательно соединенных  $R = 7 \text{ Ом}$  и  $L = 63,7 \text{ мГн}$ , приложено синусоидальное напряжение  $u(t) = 250\sin(377t) \text{ В}$ . Найдите показательное, тригонометрическое и алгебраическое комплексные выражения для тока, напряжения и сопротивления, постройте векторную диаграмму тока и напряжений.

**3.16.** Для электрической цепи синусоидального тока, схема которой приведена на рисунке, известны:  $\dot{U} = 200 \text{ В}$ ,  $f = 50 \text{ Гц}$ , величины активных сопротивлений  $R_1 = 9 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 4 \text{ Ом}$  и параметры реактивных элементов  $C = 354 \text{ мкФ}$ ,  $L = 19,1 \text{ мГн}$ . Требуется найти в комплексной форме токи в цепи, активную, реактивную и полную мощности. Постройте векторную диаграмму токов и напряжений.



**3.17.** Для электрической цепи синусоидального тока, схема которой приведена на рисунке, известны:  $\dot{U} = 200 \text{ В}$ ,  $f = 50 \text{ Гц}$ , величины активных сопротивлений  $R_1 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 2 \text{ Ом}$  и параметры реактивных элементов  $C_1 = 400 \text{ мкФ}$ ,  $C_3 = 200 \text{ мкФ}$ ,  $L = 20 \text{ мГн}$ . Требуется найти в комплексной форме токи в цепи, активную, реактивную и полную мощности.



### Контрольные задачи

Для электрической цепи, схема которой приведена ниже, определите неизвестные токи в ветвях, напряжение источника (если не задано), напряжения на индуктивностях и емкостях, активную, реактивную и полную мощности. Параметры элементов электрической цепи приведены в табл. 3.3.

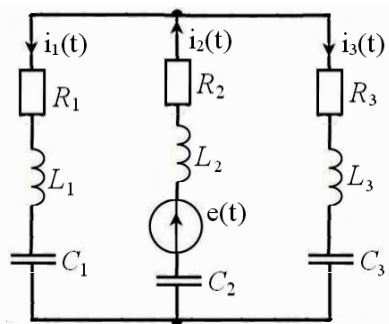


Таблица 3.3

Вариант	$R_1$ , Ом	$R_2$ , Ом	$R_3$ , Ом	$L_1$ , мГн	$L_2$ , мГн	$L_3$ , мГн	$C_1$ , мкФ	$C_2$ , мкФ	$C_3$ , мкФ	$e(t)$ , В
1	0	4	2	0	0	40	5000	5000	0	$10 \sin 100t$
2	5	0	3	0	25	0	1000	0	1000	$12 \sin 200t$
3	5	0	6	0	0	8	1000	500	0	$15 \sin 500t$
4	0	3	3	0	0	25	2500	2500	0	$17 \sin 00t$
5	5	0	5	0	6	0	625	0	625	$20 \sin 400t$
										$u_L(t)$ , В
6	3	0	2	0	30	0	1000	0	1000	$35 \sin 200t$
7	0	6	6	10	0	0	0	250	250	$40 \sin 500t$
8	7	2	0	0	0	60	5000	5000	0	$45 \sin 100t$
										$i_1(t)$ , А
9	0	5	0	0	0	20	625	0	625	$3 \sin 400t$
10	4	0	3	10	8	0	0	0	500	$4 \sin 500t$
										$i_2(t)$ , А
11	7	0	4	0	50	50	2500	0	0	$4.5 \sin 100t$
12	0	8	7	6	6	0	0	0	250	$5 \sin 1000t$
										$i_3(t)$ , А
13	6	0	3	0	8	8	250	0	0	$5.5 \sin 100t$
14	5	5	0	0	10	12	1000	0	0	$6 \sin 200t$
15	4	0	2	25	25	0	0	0	800	$6.5 \sin 250t$

### Контрольные вопросы

1. В чем отличие активного и реактивного сопротивлений?
2. Как рассчитывается полное сопротивление цепи, содержащей активное и реактивное сопротивление?
3. Чему равно полное сопротивление цепи, в которой последовательно расположены резистор, катушка индуктивности и конденсатор?
4. Если переменное напряжение приложено к конденсатору, то какой будет разность фаз между током и напряжением?
5. Назовите преимущества комплексной формы записи синусоидального тока.
6. Как рассчитываются мощности в электрических цепях синусоидального тока?
7. Какой режим работы электрической цепи называется резонансным?
8. Как влияет внутреннее сопротивление генератора на сопротивление колебательного контура при резонансе?
9. Зависит ли реактивная проводимость катушки индуктивности от величины ее активного сопротивления?
10. Запишите выражения для тока и полного сопротивления электрической цепи при резонансе напряжений.
11. Чем отличается резонанс напряжений от резонанса токов?
12. В каком случае резонансные частоты колебательного контура при последовательном и параллельном резонансах практически совпадают?
13. Объясните устройство и принцип действия однофазного трансформатора.
14. Что называют коэффициентом трансформации трансформатора?
15. Что происходит с током в первичной обмотке трансформатора при увеличении тока во вторичной обмотке?
16. Что происходит с напряжением на зажимах вторичной обмотки трансформатора при увеличении в ней тока?

## Глава 4

# ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

---

На практике ЭДС и токи в большей или меньшей степени являются несинусоидальными. Это связано с тем, что реальные генераторы не обеспечивают, строго говоря, синусоидальной формы кривых напряжения, а с другой стороны, наличие нелинейных элементов в цепи обуславливает искажение формы токов даже при синусоидальных ЭДС источников. К тому же, если в электрической цепи имеется несколько источников синусоидального тока или напряжения с разными частотами, то токи и напряжения в такой цепи будут периодическими несинусоидальными.

При расчете электрических цепей периодического несинусоидального тока используется разложение функции (тока, напряжения или ЭДС) в одну из форм гармонического ряда Фурье.

### 4.1. Формы представления гармонического ряда Фурье

Если периодическая негармоническая функция (тока, напряжения или ЭДС) представляется суммой мгновенных значений гармонических колебаний различных частот  $\omega_k = k\omega_1$ , где  $k = 1, 2, \dots$  порядковый номер гармоники, то ряд Фурье записывают в следующем виде:

$$f(t) = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} F_{mk} \sin(k\omega_1 t + \psi_k), \quad (4.1)$$

где  $F_0$  – постоянная составляющая функции  $f(t)$ , равная ее среднему за период  $T$  значению,  $F_{mk}$  – амплитуда  $k$ -й гармоники,  $\psi_k$  – начальная фаза  $k$ -й гармоники. Это **амплитудно-фазовая форма** представления ряда Фурье.

Иногда полезно использовать **тригонометрическую форму** представления ряда Фурье:

$$f(t) = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\omega_1 t), \quad (4.2)$$

где  $F_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$ ,  $A_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega_1 t) dt$ ,  $B_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega_1 t) dt$ .

Зная амплитуды двух слагаемых  $k$ -й гармоники, можно найти полную амплитуду этой гармоники и ее начальную фазу:

$$F_{mk} = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}, \quad \psi_k = \arctg \frac{B_k}{A_k}.$$

Если же расчет цепи производится по комплексным значениям, то при разложении функции используют **ряд Фурье в комплексной форме**:

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{F}_{mk} e^{jk\omega_1 t}, \quad (4.3)$$

где  $\dot{F}_{mk} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = A_k + jB_k = F_{mk} e^{j\psi_k}$  – комплексная ампли-

туда  $k$ -й гармоники.

Связь между комплексным рядом Фурье и разложением по мгновенным значениям устанавливается соотношением:

$$f(t) = F_0 + jm \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{F}_{mk} e^{jk\omega_1 t}.$$

Зависимости  $F_{mk}$  и  $\psi_k$  от порядкового номера  $k$ -й гармоники (или от частоты  $k\omega_1$ ) принято называть **амплитудным** и **фазовым спектрами** колебаний соответственно. Для периодических несинусоидальных колебаний амплитудный и фазовый спектры имеют дискретный характер, а расстояние по оси частот между смежными спектральными линиями равно  $\omega_1$ .

Теоретически ряд Фурье содержит бесконечное число членов, однако в большинстве практических случаев этот ряд достаточно быстро сходится, и при расчетах можно ограничиться сравнительно небольшим числом гармоник.

## 4.2. Расчет электрических цепей периодического несинусоидального тока

Возможность разложения периодических несинусоидальных функций в ряд Фурье позволяет свести расчет линейной цепи при воздействии на нее несинусоидальных ЭДС и/или токов источников к расчету цепей с постоянными и синусоидальными токами в отдельности для каждой гармоники. Мгновенные значения искомых токов и напряжений определяются на основе принципа наложения путем суммирования найденных при расчете гармонических составляющих напряжений и токов.

При расчете энергетических характеристик в цепях несинусоидального переменного тока, кроме мгновенных значений напряжения  $u(t)$ , тока  $i(t)$  и ЭДС  $e(t)$ , используют также **действующие значения** напряжения  $U$ , тока  $I$  и ЭДС  $E$ . Их определяют как геометрическую сумму действующих значений отдельных гармоник. В общем случае:

$$F = \sqrt{F_0^2 + \sum_{k=1}^n F_k^2}, \quad (4.4)$$

где  $F_0$  – постоянная составляющая,  $F_k = F_{mk}/\sqrt{2}$  – действующее значение  $k$ -й гармоники (напряжения, тока или ЭДС).

Активную мощность цепи определяют как среднюю мощность за период. При несинусоидальных напряжении и токе она равна сумме активных мощностей постоянной и всех гармонических составляющих напряжения и тока:

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} P_k = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots$$

Среднее значение реактивной мощности при несинусоидальных напряжении и токе:

$$Q = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k = U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_2 I_2 \sin \varphi_2 + \dots$$

Полную мощность несинусоидального тока определяют аналогично полной мощности синусоидального тока по формуле  $S = UI$ .



В отличие от синусоидального тока полная мощность  $S$  оказывается больше геометрической суммы средней активной и реактивной мощностей  $S > \sqrt{P^2 + Q^2}$ .

Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из последовательно соединенных элементов  $R = 8 \text{ Ом}$ ,  $L = 8 \text{ мГн}$ ,  $C = 100 \text{ мкФ}$ . Пусть ток изменяется по периодическому несинусоидальному закону:  $i(t) = 1,8 \sin(1000t + 15^\circ) + 1,1 \sin(2000t)$ . Найдем выражение для мгновенного значения напряжения, приложенного к этой цепи, а также величины активной, реактивной и полной мощности.

Вначале определим реактивные сопротивления индуктивности и емкости для первой и второй гармоник:

$$X_{L1} = \omega L = 1000 \cdot 8 \cdot 10^{-3} = 8 \text{ Ом}, \quad X_{L2} = 2 \cdot \omega L = 16 \text{ Ом},$$

$$X_{C1} = \frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{1000 \cdot 100} = 10 \text{ Ом}, \quad X_{C2} = \frac{1}{2\omega C} = 5 \text{ Ом}.$$

После этого можно найти полные сопротивления для первой и второй гармоник:

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + (X_{L1} - X_{C1})^2} = \sqrt{8^2 + (8 - 10)^2} = 8,25 \text{ Ом},$$

$$Z_2 = \sqrt{R^2 + (X_{L2} - X_{C2})^2} = \sqrt{8^2 + (16 - 5)^2} = 13,6 \text{ Ом}.$$

По закону Ома найдем амплитуды напряжений гармоник:

$$U_{m1} = I_{m1} Z_1 = 1,8 \cdot 8,25 = 14,85 \text{ В}, \quad U_{m2} = I_{m2} Z_2 = 1,1 \cdot 13,6 = 14,96 \text{ В}.$$

Затем найдем углы сдвига фаз для первой и второй гармоник:

$$\varphi_1 = \arctg \frac{X_{L1} - X_{C1}}{R} = \arctg \frac{8 - 10}{8} = -14^\circ,$$

$$\varphi_2 = \arctg \frac{X_{L2} - X_{C2}}{R} = \arctg \frac{16 - 5}{8} = 54^\circ.$$

Теперь можно записать выражение для мгновенного значения напряжения, приложенного к цепи:

$$u(t) = U_{m1} \sin(1000t + 15^\circ + \varphi_1) + U_{m2} \sin(2000t + \varphi_2)$$

и

$$u(t) = 14,85 \sin(1000t + 1^\circ) + 14,96 \sin(2000t + 54^\circ).$$

Далее перейдем к нахождению активной, реактивной и полной мощностей:

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2, \quad Q = U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_2 I_2 \sin \varphi_2,$$

$$P = \frac{14,85}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1,8}{\sqrt{2}} \cos(-14^\circ) + \frac{14,96}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1,1}{\sqrt{2}} \cos(54^\circ) = 12,964 + 4,838 = 17,8 \text{ Вт},$$

$$Q = \frac{14,85}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1,8}{\sqrt{2}} \sin(-14^\circ) + \frac{14,96}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1,1}{\sqrt{2}} \sin(54^\circ) = 3,234 + 6,656 = 9,89 \text{ ВАр},$$

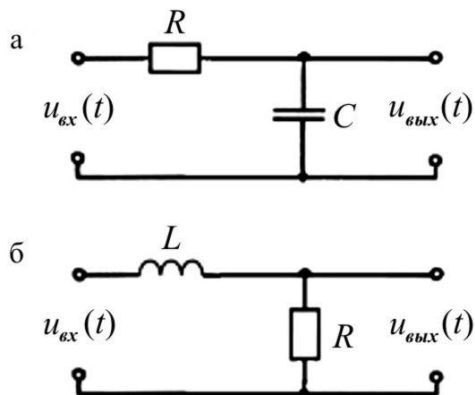
$$S = \sqrt{\frac{14,85^2}{2} + \frac{14,96^2}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1,8^2}{2} + \frac{1,1^2}{2}} = 40,3 \text{ Вт}.$$

Как видно из расчетов, для электрических цепей периодического несинусоидального тока полная мощность  $S$  оказывается больше геометрической суммы активной и реактивной мощностей  $40,3 \text{ Вт} > \sqrt{P^2 + Q^2} = 20,36 \text{ Вт}$ .

### 4.3. Электрические фильтры

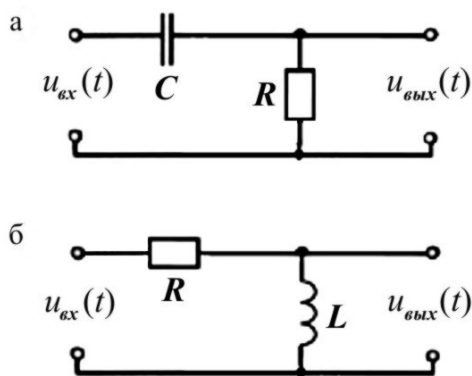
Электрическая цепь, содержащая индуктивность и/или емкость, обладает различными сопротивлениями для различных гармоник, так как индуктивное сопротивление  $X_{Lk} = k\omega L$  увеличивается с увеличением номера гармоники  $k$ , а емкостное  $X_{Ck} = \frac{1}{k\omega C}$  уменьшается. Это дает возможность при заданной кривой напряжения изменять форму кривой тока путем включения электрического фильтра между источником и потребителем.

Для того, чтобы отфильтровать высшие гармоники несинусоидального напряжения, т. е. не пропустить их к потребителю, последовательно с потребителем включается индуктивность, а параллельно емкость (см. рис. 4.1). При этом, чем выше номер гармоники, тем большим сопротивлением обладает индуктивность и тем больше напряжение этой гармоники падает на индуктивном сопротивлении и тем меньшее напряжение поступает на нагрузку. Кроме того, чем выше номер гармоники (частота), тем меньше сопротивление конденсатора, тем больший ток этой частоты проходит через конденсатор, отфильтровываясь от потребителя.



**Рис. 4.1.** Фильтры нижних частот

Если нужно отфильтровать постоянную составляющую несинусоидального напряжения или его низкие частоты (гармоники), то в фильтрах (рис. 4.1) меняют местами индуктивность и емкость (рис. 4.2).

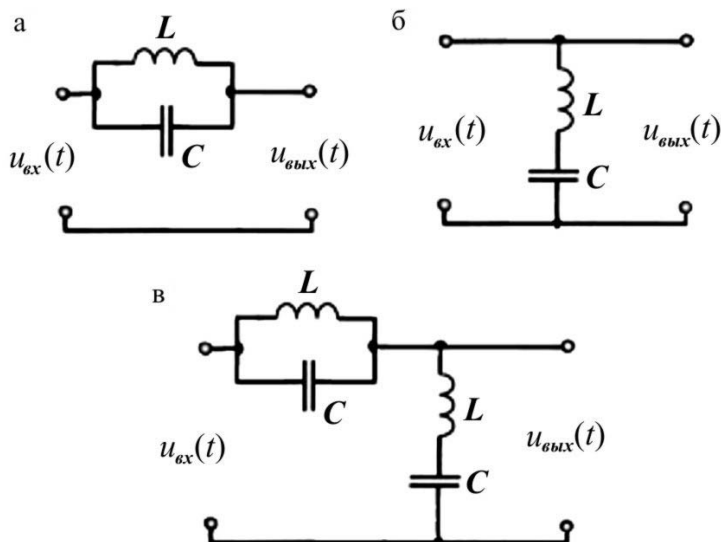


**Рис. 4.2.** Фильтры верхних частот

Если в напряжении, поступающем на вход фильтра, имеется  $k$ -я гармоника, которую нужно не пропустить к потребителю, то последовательно с потребителем можно включить параллельный резонансный контур (рис. 4.3а), настроенный в резонанс токов на частоту  $k$ -й гармоники. В результате этого на большом сопротивлении резонансного контура (близкого к бесконечности – при отсутствии активного сопро-

тивления в контуре) напряжение  $k$ -й гармоники падает на контуре, не попадая на нагрузку.

Такого же эффекта можно добиться, если параллельно с потребителем включить последовательный резонансный контур (рис. 4.3б), настроенный в резонанс напряжений на частоту  $k$ -й гармоники. При резонансе напряжений сопротивление последовательного колебательного контура мало, следовательно, уменьшается напряжение  $k$ -й гармоники на нем, а значит, и на потребителе.

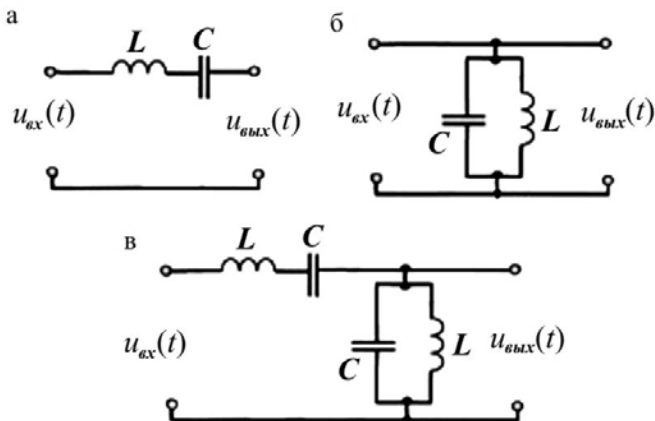


**Рис. 4.3.** Полосно-заграждающие фильтры

Одновременное включение обоих колебательных контуров (рис. 4.3в) обеспечивает значительно лучшую фильтрацию.

Если нужно уменьшить или устранить сразу несколько гармоник, то включают последовательно или/и параллельно с потребителем несколько колебательных контуров, каждый из которых настраивается в резонанс определенной гармоники.

Если резонансные контуры поменять местами (рис. 4.4 по отношению к рис. 4.3), то получаются полосовые фильтры, которые, наоборот, служат для того, чтобы пропустить к приемнику  $k$ -ю гармонику, на которую они настроены в резонанс, и не пропустить (ослабить) все другие гармоники.



**Рис. 4.4.** Полосно-пропускающие фильтры

### Комплексная передаточная функция (коэффициент передачи)

$\dot{K}$  находится как отношение выходной электрической величины (напряжения или тока) к входной.

Зависимость модуля комплексной передаточной функции  $K$  от частоты называется **амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ)**. Частотная зависимость аргумента комплексной передаточной функции  $\varphi(\omega)$  называется **фазо-частотной характеристикой (ФЧХ)**. АЧХ и ФЧХ не зависят от значений амплитуд и начальных фаз воздействий, а определяются числом, характером, значениями и видом соединения друг с другом ее элементов.

Например, для RC-цепи, изображенной на рис. 4.2а, комплексная передаточная функция может быть рассчитана так:

$$\dot{K} = \frac{\dot{u}_{\text{вых}}}{\dot{u}_{\text{вх}}} = \frac{R}{R - jX_C} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega RC}}.$$

АЧХ и ФЧХ для этой цепи будут равны, соответственно:

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega RC)^2}}} \text{ и } \varphi(\omega) = \arctg \frac{1}{\omega RC}.$$

Частотные характеристики позволяют судить о том, колебания каких частот пропускаются цепью, а какие ослабляются.

#### 4.4. Задачи

**4.1.** Для электрической цепи, состоящей из последовательно соединенных  $R$ ,  $L$  и  $C$  элементов, к которой приложено периодическое несинусоидальное напряжение, изменяющееся по закону  $u(t) = 400\sqrt{2} \sin(\omega t + \psi_1) + 180\sqrt{2} \sin(3\omega t + \psi_3)$  (В), найдите действующие значения тока первой гармоники  $I_1$ , третьей гармоники  $I_3$ , тока  $I$  и напряжения на резисторе  $U_R$ , если известно, что при частоте  $3\omega$  реактивные сопротивления на индуктивности и емкости равны  $X_{L3} = X_{C3} = 30$  Ом, активное сопротивление  $R = 60$  Ом.

**4.2.** К электрической цепи, состоящей из последовательно соединенных элементов с параметрами  $R = 100$  Ом,  $L = 20$  мГн,  $C = 2$  мкФ, приложено периодическое несинусоидальное напряжение

$$u(t) = 250 \sin(1000t) + 180 \sin(3000t + 15^\circ) + 160 \sin(5000t) + \\ + 121 \sin(7000t - 30^\circ) \text{ (В)}.$$

Определите и запишите выражение для мгновенного значения силы тока  $i(t)$  в этой электрической цепи.

**4.3.** В электрической цепи, состоящей из последовательно соединенных элементов с параметрами  $R = 21$  Ом,  $L = 20$  мГн,  $C = 100$  мкФ, периодический несинусоидальный ток изменяется по закону  $i(t) = 2 \sin(1000t + 60^\circ) + 1,5 \sin(2000t - 30^\circ)$  (А). Запишите выражение для мгновенного значения приложенного к цепи напряжения  $u(t)$ .

**4.4.** К электрической цепи, состоящей из параллельно соединенных элементов с параметрами  $R = 1$  Ом,  $L = 1$  мГн,  $C = 500$  мкФ, приложено несинусоидальное напряжение, изменяющееся по закону  $u(t) = 12 \sin(1000t) + 4 \sin(2000t - 60^\circ)$  (В). Запишите выражение для мгновенного значения силы тока в цепи  $i(t)$ .

**4.5.** Вычислите действующее значение периодического несинусоидального напряжения  $u(t) = 10 \sin(400t) + 5 \sin(800t) + \sin(1200t)$  (В). Запишите выражение для мгновенного значения силы тока в цепи, содержащей индуктивный элемент  $L = 10$  мГн.

**4.6.** Вычислите действующее значение периодического несинусоидального тока  $i(t) = 5 + 10\sin(\omega t) + 10\cos(2\omega t)$  (А).

**4.7.** Вычислите активную, реактивную и полную мощности, если  
 $u(t) = 141\sin(\omega t) + 11\sin(3\omega t + 60^\circ)$  (В),  
 $i(t) = 10,19\sin(\omega t - 11^\circ) + 2\cos(3\omega t) + \sin(5\omega t)$  (А).

**4.8.** Вычислите действующее значение разности двух несинусоидальных токов  $i_1(t) = 5 + 4\cos(\omega t - \pi/3) + 3\cos(2\omega t + \pi/6)$  (А) и  $i_2(t) = 3 - 5\cos(\omega t) + 2\cos(2\omega t + \pi/6)$  (А).

**4.9.** К параллельно соединенным элементам с параметрами  $R = 50$  Ом и  $C = 50$  мкФ подключили источник периодического несинусоидального напряжения, изменяющегося по закону  $u(t) = 50 + 100\sin(400t + \pi/6) + 50\sin(1200t - \pi/4)$  (В) с внутренним сопротивлением  $R_{вн} = 30$  Ом. Определите действующее значение суммарного тока.

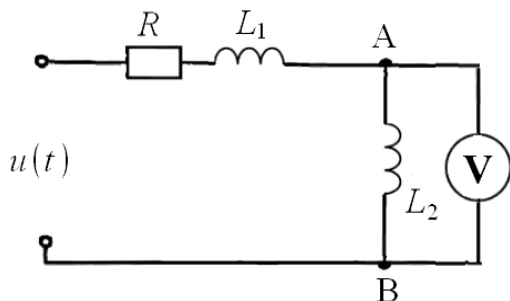
**4.10.** Для предыдущей задачи вычислите активную мощность, расходуемую в обоих сопротивлениях.

**4.11.** В электрической цепи, состоящей из последовательно соединенных элементов с параметрами  $R = 8$  Ом,  $L = 20$  мГн,  $C = 33,3$  мкФ, периодический несинусоидальный ток изменяется по закону  $i(t) = 1,8\sin(1000t + 15^\circ) + 1,1\sin(3000t)$  (А). Запишите выражение для мгновенного значения приложенного к цепи напряжения  $u(t)$ , определите активную, реактивную и полную мощности.

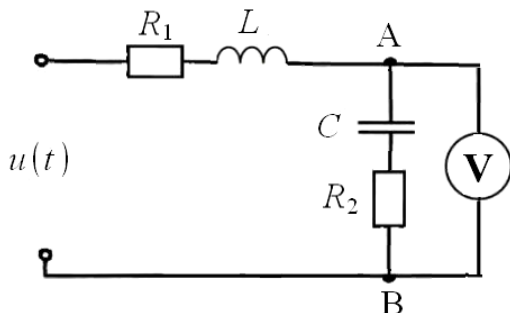
**4.12.** Для электрических фильтров, изображенных на рис. 4.1–4.4 найдите в общем виде АЧХ и ФЧХ.

**4.13.** К электрической цепи, изображенной ниже, приложено периодическое несинусоидальное напряжение, изменяющееся по закону  $u(t) = 10 + 20\sin(100t + 60^\circ) + 16\sin(300t - 45^\circ)$  (В). Известны активное сопротивление  $R = 2$  Ом и индуктивности  $L_1 = 2$  мГн,  $L_2 = 1$  мГн. Запишите выражение для мгновенного значения силы тока, определите

показания вольтметра V, рассчитайте активную, реактивную и полную мощности.



**4.14.** К электрической цепи, изображенной ниже, приложено периодическое несинусоидальное напряжение, изменяющееся по закону  $u(t) = 310 + 210\sin(\omega t) + 176\sin(3\omega t + 72^\circ)$  (В). Известны активные сопротивления  $R_1 = 4$  Ом,  $R_2 = 6$  Ом и реактивные сопротивления для первой гармоники  $X_{L1} = 3$  Ом,  $X_{C1} = 9$  Ом. Запишите выражение для мгновенного значения силы тока, определите показания вольтметра V, рассчитайте активную, реактивную и полную мощности.

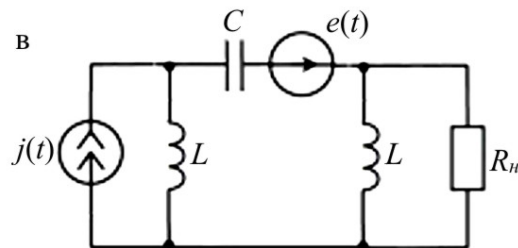
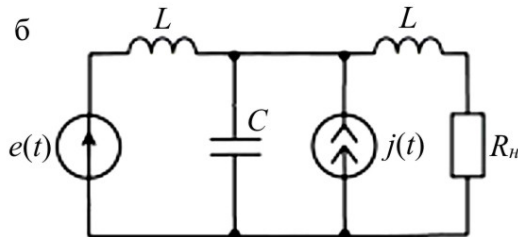
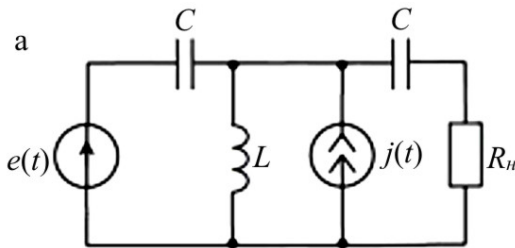




### Контрольные задачи

В схемах электрических цепей, изображенных ниже, действуют два гармонических источника кратных частот  $\omega_e = k\omega_0$ ,  $\omega_j = m\omega_0$ , где  $\omega_0 = 10^4$  рад/с. Параметры элементов схем, значения частот и амплитуд источников приведены в табл. 4.1, где принято  $E_{m0} = 10$  В,  $J_{m0} = 1$  А,  $L_0 = 10$  мГн,  $C_0 = 1$  мкФ,  $R_{n0} = 100$  Ом.

Определите мгновенное и комплексное значения тока в нагрузке, действующее значение напряжения и тока в нагрузке, рассчитайте активную, реактивную и полную мощности в цепи.



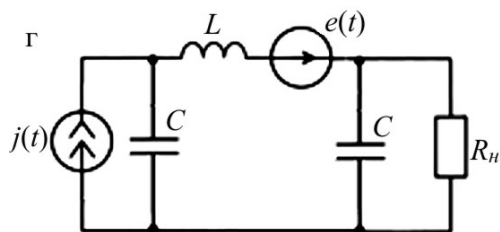


Таблица 4.1

Вариант	Рис.	Значения параметров элементов ветвей						
		$k$	$m$	$E_m/E_{m0}$	$J_m/J_{m0}$	$R_H/R_{H0}$	$L/L_0$	$C/C_0$
1	а	5	1	5	7	2	8	4
2	б	1	4	2	5	4	2	1
3	в	3	1	4	6	3	4	2
4	г	1	3	5	2	5	1	2
5	а	2	1	3	4	4	4	2
6	б	1	4	6	4	3	2	1
7	в	4	2	1	3	1	6	2
8	г	2	1	4	3	2	4	3
9	а	1	3	3	2	4	2	1
10	б	3	1	6	4	4	1	5
11	в	3	1	7	6	2	3	4
12	г	1	2	5	4	4	3	1
13	а	3	1	5	2	5	1	2
14	б	1	4	3	4	4	4	2
15	в	2	1	3	2	4	2	1
16	г	1	3	2	5	4	2	1

### **Контрольные вопросы**

1. Что является причиной появления несинусоидальных токов и напряжений в электрических цепях?
2. Какие величины и коэффициенты характеризуют периодические несинусоидальные электрические токи?
3. Как определяются действующие значения периодических несинусоидальных величин?
4. Зависит ли действующее значение несинусоидальной функции от начальных фаз и от частот отдельных гармоник?
5. Достаточно ли для определения величины полной мощности в цепи несинусоидального тока наличие информации об активной и реактивной мощностях?
6. Для каких цепей справедлива методика расчета цепей несинусоидального тока, основанная на разложении ЭДС и токов источников в ряды Фурье?
7. Что собой представляют и для чего используются электрические фильтры?
8. Как классифицируются фильтры в зависимости от диапазона пропускаемых частот?
9. Как определяется полоса пропускания или полоса задерживания электрического фильтра?
10. Как определить характеристические сопротивления несимметричного фильтра по данным холостого хода и короткого замыкания?
11. Как найти полосу пропускания фильтра по заданной частотной зависимости его характеристического сопротивления?
12. Какие частотные характеристики электрических цепей вам известны?
13. В чём особенности частотных характеристик цепей, содержащих различные реактивные элементы?
14. Как рассчитать АЧХ и ФЧХ электрических фильтров?
15. Какие гармоники присутствуют в спектре функций симметричных относительно оси абсцисс (ординат)?

## Глава 5

### ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

---

Под переходным процессом в электрической цепи понимается процесс перехода цепи из одного установившегося состояния в другое. Переходные процессы могут возникать при любых изменениях режима электрической цепи (при подключении и отключении источника, при изменении нагрузки, при размыкании ветви и т. д.), если в цепи имеются индуктивные и емкостные элементы, обладающие способностью накапливать или отдавать энергию магнитного или электрического поля.

Изменения в электрической цепи можно представить в виде тех или иных переключений, называемых в общем случае **коммутацией**.

Ток в индуктивности и напряжение на емкости не могут изменяться мгновенно. На этом основаны законы коммутации.

**Первый закон коммутации** состоит в том, что ток в ветви с индуктивным элементом в начальный момент времени после коммутации имеет то же значение, какое он имел непосредственно перед коммутацией, а затем с этого значения он начинает плавно изменяться.

**Второй закон коммутации** состоит в том, что напряжение на емкостном элементе в начальный момент времени после коммутации имеет то же значение, какое он имел непосредственно перед коммутацией, а затем с этого значения оно начинает плавно изменяться.

#### 5.1. Расчет переходных процессов классическим методом

Для анализа переходного процесса следует привести схему к минимальному числу накопителей энергии, исключив параллельное и последовательное соединение однотипных реактивных элементов (индуктивностей и/или емкостей).

### **Алгоритм расчета переходных процессов классическим методом**

1. Рассчитывается цепь до коммутации и определяются токи в индуктивностях и напряжения на емкостях. Полагаем  $t = 0$  и получаем значения токов в индуктивностях и напряжений на емкостях в момент коммутации (так находятся начальные условия).

2. Составляется система интегро-дифференциальных уравнений для мгновенных значений токов и напряжений рассматриваемой цепи **после коммутации** (т. е. после замыкания или размыкания ключа), используя законы Кирхгофа и следующие уравнения для отдельных элементов цепи:

$$u_R = Ri_R, \quad u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}, \quad i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt},$$
$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int u_L(t) dt, \quad u_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt.$$

3. Эту систему уравнений путем замены переменных сводят к дифференциальному уравнению  $n$ -го порядка относительно искомой величины ( $i_L, u_C$ ).

$$\frac{d^n i_L}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} i_L}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{di_L}{dt} + a_n i_L = f_i(t),$$
$$\frac{d^n u_C}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} u_C}{dt^{n-1}} + \dots + b_{n-1} \frac{du_C}{dt} + b_n u_C = f_u(t),$$

где  $a_i, b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) – постоянные коэффициенты, зависящие от параметров цепи ( $R, L$  и  $C$ );  $f_i(t), f_u(t)$  – функции времени, зависящие от ЭДС и токов источников.

Порядок дифференциального уравнения  $n$  равняется числу реактивных элементов (индуктивностей и емкостей) в исследуемой цепи.

4. Общее решение дифференциального уравнения ищется в виде двух членов:

$$i_L = i_{L\text{св}} + i_{L\text{пр}} \quad \text{или} \quad u_C = u_{C\text{св}} + u_{C\text{пр}},$$

где свободные составляющие соответствуют общим решениям однородного уравнения без правой части (т. е. без учета источников энергии), а принужденные составляющие соответствуют частным решениям неоднородного уравнения с правой частью.

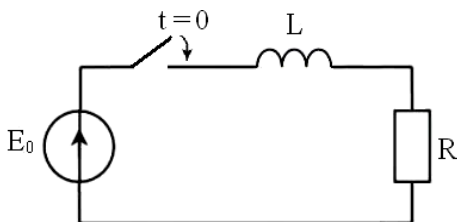
Принужденную составляющую определяют как установившееся значение при  $t \rightarrow \infty$ .

Решение для свободных составляющих ищется в виде суммы  $n$  слагаемых:

$$i_{L\text{св}} = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}, \quad u_{C\text{св}} = \sum_{k=1}^n B_k e^{p_k t},$$

где  $A_k, B_k$  – постоянные интегрирования однородных дифференциальных уравнений, которые определяются из п. 1 при помощи законов коммутации,  $p_k$  – корни характеристических уравнений, которые получаются из дифференциальных уравнений путем замены производных операторами  $p_k$ .

Например, в электрической цепи, состоящей из последовательно соединенных резистора и индуктивности (рис. 5.1) замыкается ключ. Найдем в общем виде, как будет изменяться ток в электрической цепи после замыкания ключа, если  $E_0 = \text{const}$ .



**Рис. 5.1.** Схема электрической цепи

Поскольку цепь до коммутации была разомкнута, то  $i(0) = 0$ . Далее составляется система уравнений:

$$i(t)R + u_L(t) = E_0, \quad u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}.$$

Отсюда получается дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{E_0}{L}.$$

Общее решение ищется в виде двух слагаемых:  $i(t) = i_{\text{св}}(t) + i_{\text{пр}}(t)$ .

Принужденную составляющую определим как установившееся значение при  $t \rightarrow \infty$ , следовательно  $i_{\text{пр}}(t) = \frac{E_0}{R}$ .

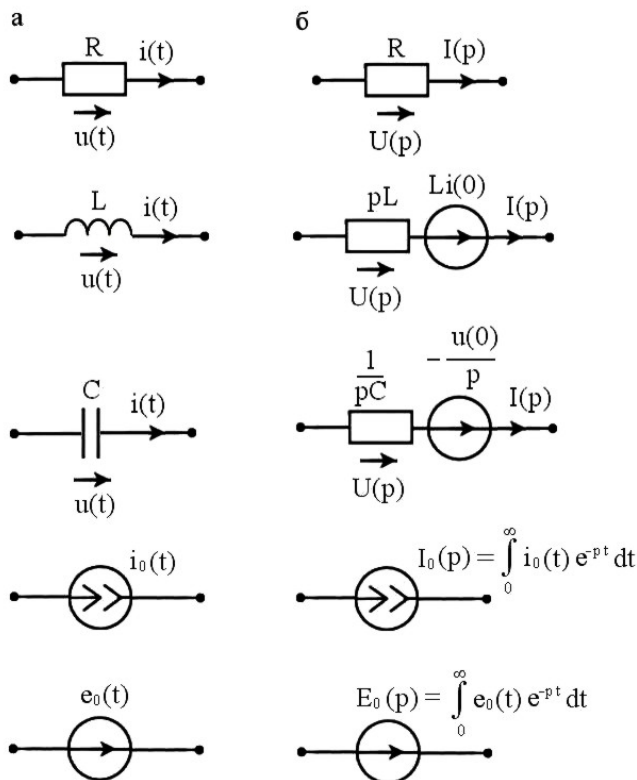
Решение для свободных составляющих ищется в виде  $i_{\text{св}}(t) = Ae^{pt}$ , где  $p$  – корень характеристического уравнения  $p + \frac{R}{L} = 0$ , постоянная  $A$  ищется с помощью начальных условий  $i(0) = Ae^{\frac{-R}{L} \cdot 0} + \frac{E_0}{R} = A + \frac{E_0}{R} = 0$ , отсюда получаем  $A = -\frac{E_0}{R}$  и в результате находим  $i(t) = \frac{E_0}{R} \left( 1 - e^{\frac{-R}{L}t} \right)$ .

## 5.2. Расчет переходных процессов операторным методом

Главная трудность в решении задач классическим методом для уравнений высоких порядков состоит в отыскании корней характеристического уравнения и постоянных интегрирования. Поэтому для решения уравнений порядка выше второго применяют другие методы, в частности операторный метод, основанный на применении преобразования Лапласа и исключающий трудоемкую процедуру отыскания постоянных интегрирования.

### *Алгоритм расчета переходных процессов операторным методом*

1. Рассчитывается цепь до коммутации и определяются токи в индуктивностях и напряжения на емкостях. Полагаем  $t = 0$  и получаем значения токов в индуктивностях и напряжений на емкостях в момент коммутации.
2. Составляется операторная схема замещения цепи **после коммутации**. Применяя преобразование Лапласа к соотношениям, связывающим токи и напряжения на каждом элементе цепи, можно установить правила перехода от реальной цепи к операторной (см. рис. 5.2).
3. Производится расчет операторной схемы замещения (допускается использование всех известных методов расчета электрических цепей).



**Рис. 5.2.** Замена элементов электрической цепи (столбец а) элементами операторной схемы замещения (столбец б)

4. Определяются оригиналы функций по их операторным изображениям. Здесь можно воспользоваться **теоремой разложения**.

Если изображение имеет вид правильной дроби  $F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$ ,

причем числитель и знаменатель не имеют общих корней, то в случае простых корней  $p_1, p_2, \dots, p_n$  уравнения  $F_2(p) = 0$  оригинал функции может быть найден следующим образом:

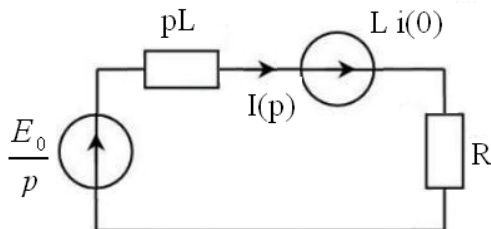
$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}.$$



Найдем теперь операторным методом, как будет изменяться ток в электрической цепи, изображенной на рис. 5.1 после замыкания ключа, если  $E_0 = \text{const}$ .

Поскольку цепь до коммутации была разомкнута, то  $i(0) = 0$ .

Далее рисуется операторная схема замещения (см. рис. 5.3).



**Рис. 5.3.** Операторная схема замещения

Так как сила тока в начальный момент времени была равна нулю, то ЭДС второго источника будет равна нулю.

По второму закону Кирхгофа составляется уравнение для изображений  $I(p)(pL + R) = \frac{E_0}{p}$ , откуда можно выразить изображение силы

$$\text{тока } I(p) = \frac{E_0}{p(pL + R)}.$$

Оригинал функции тока найдем по теореме разложения

$$i(t) = \sum_{k=1}^2 \frac{I_1(p_k)}{I'_2(p_k)} e^{p_k t} = \sum_{k=1}^2 \frac{E_0}{2pL + R} e^{p_k t}.$$

Из уравнения  $p(pL + R) = 0$  находим корни  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = -\frac{R}{L}$ .

Теперь подставляем их и находим мгновенное значение силы тока в цепи после замыкания ключа:

$$i(t) = \frac{E_0}{2 \cdot 0 \cdot L + R} e^{0 \cdot t} + \frac{E_0}{-2 \cdot \frac{R}{L} \cdot L + R} e^{\frac{-R}{L} t} = \frac{E_0}{R} \left( 1 - e^{\frac{-R}{L} t} \right).$$

### 5.3. Расчет переходных процессов смешанным методом

Решение ищется как в классическом методе в виде суммы двух составляющих  $i_L = i_{L\text{св}} + i_{L\text{пр}}$  или  $u_C = u_{C\text{св}} + u_{C\text{пр}}$ . Первую свободную составляющую находят операторным методом, а принужденную составляющую – как в классическом методе.

Так как свободные составляющие определяются запасами внутренней энергии, значит, в операторной схеме внешние источники цепи отсутствуют, поэтому не будет и внешних корней, обусловленных действием этих источников.

Начальные условия для свободных составляющих находятся следующим образом:

$$i_{L\text{св}}(0) = i_L(0) - i_{L\text{пр}}(0), \quad u_{C\text{св}}(0) = u_C(0) - u_{C\text{пр}}(0).$$

Смешанный метод позволяет избежать нахождения постоянных интегрирования и выделения принужденной составляющей.

Найдем теперь смешанным методом, как будет изменяться ток в электрической цепи, изображенной на рис. 5.1 после замыкания ключа, если  $E_0 = \text{const}$ .

Поскольку цепь до коммутации была разомкнута, то  $i(0) = 0$ .

Общее решение ищется в виде двух слагаемых:  $i(t) = i_{\text{св}}(t) + i_{\text{пр}}(t)$ .

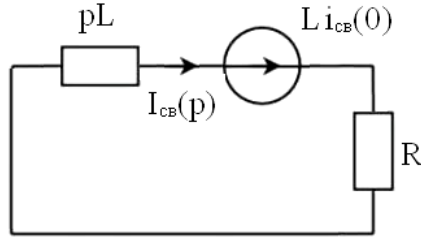
Принужденную составляющую определим как в классическом методе, т. е. как установившееся значение при  $t \rightarrow \infty$ , следовательно

$$i_{\text{пр}}(t) = \frac{E_0}{R}.$$

Далее записываются начальные условия для свободной составляющей:

$$i_{\text{св}}(0) = i(0) - i_{\text{пр}}(0) = -\frac{E_0}{R}.$$

После этого рисуется операторная схема замещения для свободной составляющей (см. рис. 5.4).



**Рис. 5.4.** Операторная схема замещения для свободной составляющей

По второму закону Кирхгофа составляется уравнение для изображений  $I_{cb}(p)(pL + R) = -\frac{E_0 L}{R}$ , откуда можно выразить изображение свободной составляющей силы тока  $I_{cb}(p) = \frac{-E_0 L}{R(pL + R)}$ .

Оригинал свободной составляющей тока найдем по теореме разложения  $i_{cb}(t) = \sum_k \frac{I_1(p_k)}{I'_2(p_k)} e^{p_k t} = -\frac{E_0}{R} e^{pt}$ .

Из уравнения  $R(pL + R) = 0$  находим корень  $p = -\frac{R}{L}$ .

Подставляем этот корень и находим оригинал функции свободной составляющей:

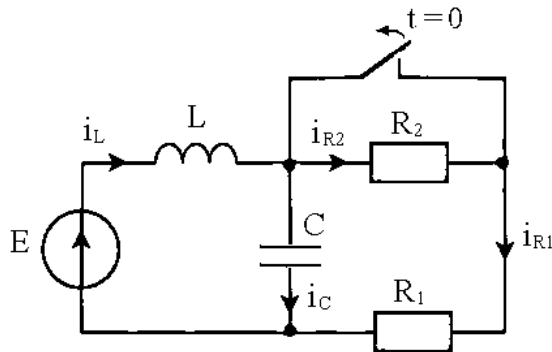
$$i_{cb}(t) = -\frac{E_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Теперь можем найти общее решение:

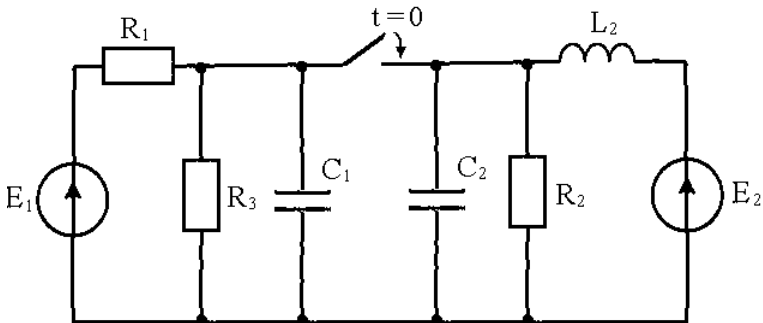
$$i(t) = i_{cb}(t) + t_{пр}(t) = \frac{E_0}{R} - \frac{E_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E_0}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

## 5.4. Задачи

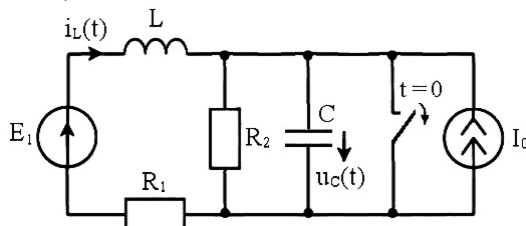
5.1. Для электрической цепи, схема которой приведена ниже, найдите мгновенные значения токов и напряжений во всех элементах цепи до размыкания ключа (при  $t = 0_-$ ) и сразу после размыкания (при  $t = 0_+$ ). Параметры элементов цепи имеют следующие значения:  $E = 180 \text{ В}$ ,  $L = 0,1 \text{ Гн}$ ,  $C = 10 \text{ мкФ}$ ,  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 40 \text{ Ом}$ .



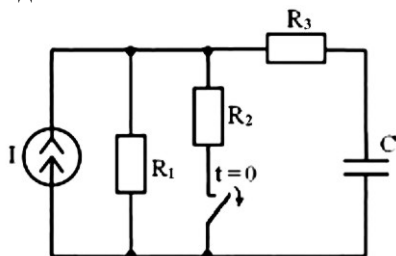
5.2. Для электрической цепи, схема которой приведена ниже, рассчитайте мгновенные значения токов и напряжений в элементах до замыкания и сразу после замыкания ключа. Параметры элементов схемы имеют следующие значения:  $E_1 = E_2 = 100 \text{ В}$ ,  $R_1 = R_2 = R_3 = 100 \text{ Ом}$ ,  $L_2 = 0,1 \text{ Гн}$ ,  $C_1 = C_2 = 1 \text{ мкФ}$ .



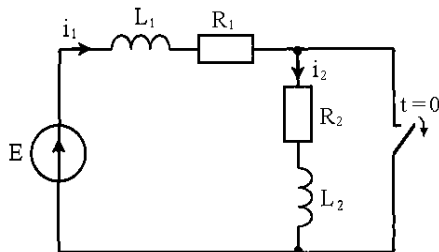
**5.3.** Для электрической цепи, схема которой приведена ниже, рассчитайте мгновенные значения токов и напряжений в элементах до замыкания и сразу после размыкания ключа, если параметры схемы:  $E_1 = 100 \text{ В}$ ,  $I_0 = 1 \text{ А}$ ,  $R_1 = R_2 = 10 \text{ Ом}$ .



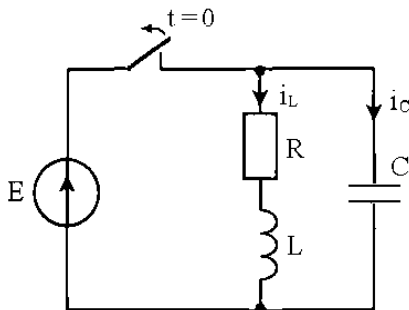
**5.4.** Для электрической цепи, схема которой приведена ниже, определите напряжение на емкости после размыкания ключа, если параметры цепи имеют следующие значения:  $I = 1 \text{ А}$ ,  $R_1 = R_2 = R_3 = 100 \text{ Ом}$ ,  $C = 10 \text{ мкФ}$ . Расчеты проведите классическим и операторным методами.



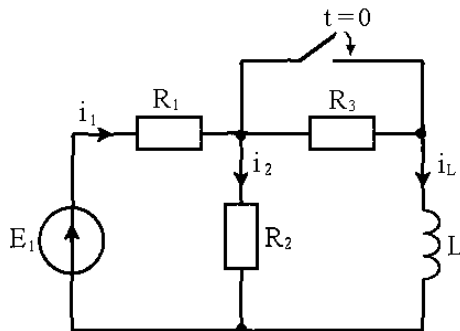
**5.5.** Для электрической цепи, схема которой приведена ниже, рассчитайте ток в цепи после размыкания ключа, если параметры:  $R_1 = R_2 = 100 \text{ Ом}$ ,  $L_1 = L_2 = 0,1 \text{ Гн}$ ,  $E = 100 \text{ В}$ . Расчеты проведите классическим, операторным и смешанным методами.



**5.6.** Для электрической цепи, схема которой приведена ниже, рассчитайте мгновенные значения токов и напряжений на индуктивности и емкости при размыкании ключа, если параметры элементов схемы имеют следующие значения:  $C = 3,33 \text{ мФ}$ ,  $R = 40 \text{ Ом}$ ,  $L = 1 \text{ Гн}$ ,  $E = 40 \text{ В}$ . Расчеты проведите классическим и операторным методами.

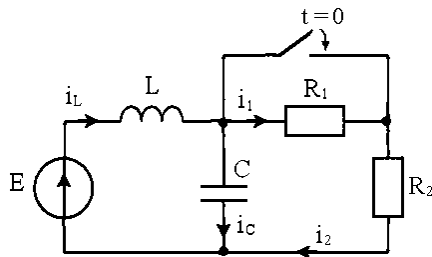


**5.7.** Для электрической цепи, схема которой приведена ниже, рассчитайте ток в индуктивности и постройте его зависимость от времени после замыкания ключа, если параметры элементов схемы имеют следующие значения:  $R_1 = R_2 = R_3 = 10 \text{ Ом}$ ,  $L = 0,1 \text{ Гн}$ ,  $E_1 = 30 \text{ В}$ . Расчеты проведите классическим, операторным и смешанным методами.



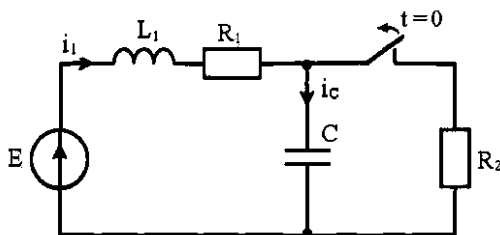
**5.8.** Для электрической цепи, схема которой приведена ниже, рассчитайте токи во всех ветвях и напряжения на емкости и индуктивности после замыкания ключа. Постройте зависимости токов и напряжений от времени, если параметры элементов схемы имеют следующие

значения:  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 40 \text{ Ом}$ ,  $L = 0,1 \text{ Гн}$ ,  $C = 10 \text{ мкФ}$ ,  $E = 180 \text{ В}$ .  
 Расчеты проведите классическим, операторным и смешанным методами.

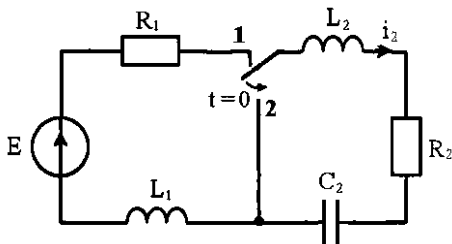


**5.9.** Для электрической цепи, схема которой приведена ниже, рассчитайте ток и напряжения на емкости и индуктивности после размыкания ключа, если параметры элементов схемы имеют следующие значения:  $R_1 = 50 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $L_1 = 0,1 \text{ Гн}$ ,  $C = 250 \text{ мкФ}$ ,  $E = 150 \text{ В}$ .

Расчеты проведите классическим и операторным методами.

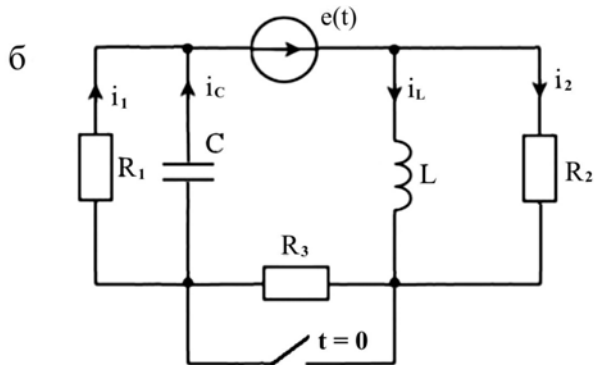
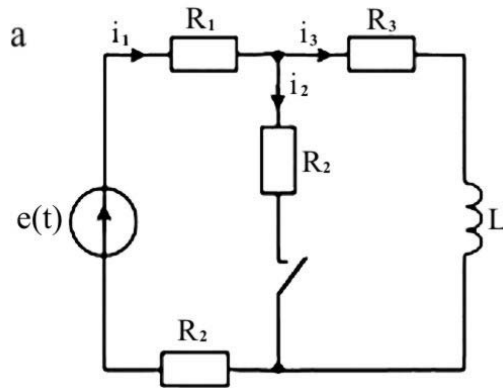


**5.10.** Для электрической цепи, схема которой приведена ниже, определите переходное значение тока  $i_2$  после переключения ключа из положения 1 в положение 2, если параметры элементов схемы имеют следующие значения:  $R_2 = 4 \text{ кОм}$ ,  $L_2 = 1 \text{ Гн}$ ,  $C = 0,33 \text{ мкФ}$ , при  $E = 100 \text{ В}$ .  
 Расчеты проведите классическим и операторным методами.



### Контрольные задачи

Для электрических цепей, схемы которых приведены ниже, рассчитайте мгновенное значение величины, указанной в таблице, после выполнения коммутации. Выбор схемы, параметров ее элементов и вида коммутации выполните в соответствии с номером вашего варианта. Расчет выполните классическим и операторным методами.





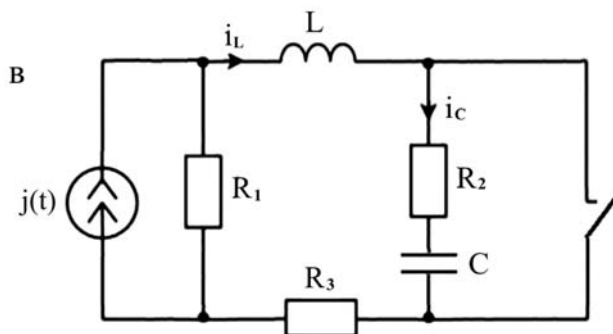


Таблица 5.1

Вари- ант	Схема	Ключ	$e(t)$ , В	$L$ , мГн	$R_1$ , Ом	$R_2$ , Ом	$R_3$ , Ом	$R_4$ , Ом	Найти
1	а	зам.	120	1	20	20	40	20	$i_L$
2	а	разм.	120	1	20	20	40	20	$u_L$
3	а	зам.	$50 \sin(200t)$	10	10	40	100	100	$i_L$
4	а	разм.	$50 \sin(100t)$	10	10	40	100	100	$u_L$
								<b>C, мкФ</b>	
5	б	зам.	120	1	4	4	8	10	$i_C$
6	б	разм.	240	1	2	2	4	10	$i_L$
7	б	зам.	100	1	10	5	5	0,5	$u_2$
8	б	разм.	100	1	10	5	5	0,5	$i_L$
			<b><math>j(t)</math>, А</b>						
9	в	зам.	5	1	20	20	10	10	$i_C$
10	в	разм.	5	1	20	20	10	10	$u_C$
11	в	зам.	2	1	40	20	10	1	$u_L$
12	в	разм.	2	1	40	20	10	1	$i_L$

### Контрольные вопросы

1. Чем обусловлены переходные процессы в электрических цепях?
2. Как определяют длительность переходного процесса ?
3. Возможно ли включение на переменное гармоническое напряжение контуров  $R, L$ ;  $R, C$  и  $R, L, C$ , не сопровождаемое переходным процессом?
4. Как определяется порядок дифференциального уравнения, описывающего переходный процесс?
5. Зависит ли порядок дифференциального уравнения, описывающего переходный процесс, от количества источников электрической энергии?
6. Для каких электрических цепей применим классический метод расчета переходных процессов?
7. Как в классическом методе получается характеристическое уравнение?
8. Для каких электрических цепей используют операторный метод расчета переходных процессов?
9. Как строится операторная схема замещения в операторном методе?
10. Для чего используется прямое преобразование Лапласа в операторном методе?
11. Как можно найти оригинал функции по ее изображению?
12. В чем суть смешанного метода расчета переходных процессов в электрических цепях?
13. Как учитывается энергия магнитного и электрического полей, имеющаяся к началу исследуемого переходного процесса в классическом, операторном и смешанном методах?
14. Какие еще методы расчета переходных процессов вам известны? Когда их используют?
15. Можно ли эти методы использовать для расчета переходных процессов в нелинейных электрических цепях? Почему?

## ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

---

1.1. а) 8,5 Ом; б) 5,5 Ом.

1.2. а) 16,67 Гн; б) 3 Гн.

1.3. а) 0,5 мкФ; б) 0,75 мкФ.

1.4. а)  $R_{AB} = R_{AC} = \frac{7}{11} R$ ;  $R_{BC} = 0$ ;  $R_{BD} = R_{CD} = \frac{10}{11} R$ ;  $R_{AD} = \frac{13}{11} R$ .

б)  $R_{AB} = R_{CD} = \frac{5}{4} R$ ;  $R_{AC} = R_{BD} = \frac{3}{2} R$ ;  $R_{AD} = R_{BC} = \frac{7}{4} R$ .

в)  $R_{AB} = 0,871R$ ;  $R_{AC} = 3,752R$ ;  $R_{CD} = 0,443R$ ;  $R_{BC} = 3,434R$ ;  
 $R_{BD} = 3,336R$ ;  $R_{AD} = 2,571R$ .

г)  $R_{AB} = R_{BC} = R_{BD} = \frac{4}{3} R$ ;  $R_{AC} = R_{CD} = \frac{1}{3} R$ .

д)  $R_{AB} = R_{BC} = R_{BD} = \frac{5}{8} R$ ;  $R_{AC} = R_{CD} = \frac{1}{2} R$ .

1.5.  $G_{AE} = G_{DE} = \frac{3}{R}$ ;  $G_{EB} = \frac{1}{R}$ .

2.1.  $I_1 = 2,5 \text{ A}$ ;  $I_2 = 1,25 \text{ A}$ ;  $I_3 = 3,75 \text{ A}$ .

2.2.  $I_1 = 11 \text{ A}$ ;  $I_2 = 12 \text{ A}$ ;  $I_3 = 10 \text{ A}$ ;  $I_4 = 2 \text{ A}$ .

2.3.  $I_1 = 1 \text{ A}$ ;  $I_2 = 0,5 \text{ A}$ ;  $I_3 = 1,5 \text{ A}$ ;  $I_4 = 3,5 \text{ A}$ .

2.4.  $I_1 = \frac{11}{3} \text{ A}$ ;  $I_2 = \frac{5}{3} \text{ A}$ ;  $I_3 = \frac{2}{3} \text{ A}$ ;  $I_4 = -2 \text{ A}$ ;  $I_5 = \frac{7}{3} \text{ A}$ ;  $I_6 = \frac{13}{3} \text{ A}$ .

3.1. 6,7 Ом.

3.2.  $i_3(t) = 5 \sin(\omega t + 143^\circ) \text{ A}$ .

3.3.  $u(t) = 302,6 \sin(10^4 t + 82^\circ 24')$  В.

3.4.  $R = X = 2,5 \text{ Ом}$ .

3.5.  $G = 0,12 \text{ См}$ ;  $B = 0,2 \text{ См}$ .

3.6.  $I = 0,75 \text{ A}$ .

- 3.7.  $X_L = 20 \text{ Ом}$ .
- 3.8.  $I \approx 0,85 \text{ A}$ .
- 3.9.  $\omega = 5,76 \cdot 10^6 \text{ рад/с}$ ;  $I \approx 1,58 \text{ A}$ ;  $U \approx 73,8 \text{ В}$ .
- 3.10.  $U = 165 \text{ В}$ ;  $I = 4,125 \text{ A}$ .
- 3.11.  $I_2 = 50 \text{ A}$ .
- 3.12.  $n_1 = 32$ ;  $n_2 = 824$ ;  $n \approx 0,04$ .
- 3.13.  $I_2 = 2 \text{ A}$ ;  $Z_H = 225 \text{ Ом}$ .
- 3.14.  $\dot{Z} = 4,94e^{-j8^\circ 30'} \text{ Ом}$ ;  $\dot{Y} = 0,2e^{j8^\circ 30'} \text{ СМ}$ .
- 3.15.  $\dot{I} = 7 \cdot e^{-j73^\circ 45'} = 7[\cos(73^\circ 45') - j\sin(73^\circ 45')] = 1,97 - j6,76 \text{ (A)}$ ;  
 $\dot{U} = 176,78 \text{ В}$ ;  $\dot{Z} = 25 \cdot e^{j73^\circ 45'} = 7 + j24 \text{ (Ом)}$ .
- 3.16.  $\dot{I} = 78 \cdot e^{-j3^\circ} \text{ A}$ ;  $\dot{I}_1 = 11,1 \cdot e^{-j45^\circ} \text{ A}$ ;  $\dot{I}_2 = 16,67 \cdot e^{-j45^\circ} \text{ A}$ ;  $\dot{I}_3 = 50 \text{ A}$ ;  
 $P \approx 15\,578,16 \text{ Вт}$ ;  $Q \approx 811,2 \text{ ВАп}$ ;  $S \approx 15\,600 \text{ ВА}$ .
- 3.17.  $\dot{I}_1 = 10,75 \cdot e^{-j38^\circ 40'} \text{ A}$ ;  $\dot{I}_2 = 19,6 \cdot e^{-j52^\circ 20'} \text{ A}$ ;  $\dot{I}_3 = 8 \cdot e^{j110^\circ 40'} \text{ A}$ ;  
 $P \approx 1\,677 \text{ Вт}$ ;  $Q \approx 1\,343 \text{ ВАп}$ ;  $S = 2\,150 \text{ ВА}$ .
- 4.1.  $I_1 = 4 \text{ A}$ ;  $I_3 = 3 \text{ A}$ ;  $I = 5 \text{ A}$ ;  $U_R = 300 \text{ В}$ .
- 4.2.  $i(t) = 0,51\sin(1000t + 78^\circ) + 1,22\sin(3000t + 62^\circ) +$   
 $+ 1,6\sin(5000t) + \sin(7000t - 65^\circ) \text{ (A)}$ .
- 4.3.  $u(t) = 46,5\sin(1000t + 70^\circ) + 61,2\sin(2000t + 29^\circ) \text{ (В)}$ .
- 4.4.  $i(t) = 9,6\sin(1000t - 26^\circ 34') + 3,2\sin(2000t - 33^\circ 26') \text{ (A)}$ .
- 4.5.  $U = 7,9 \text{ В}$ ;  $i(t) = 2,5\sin(400t - 90^\circ) + 0,625\sin(800t - 90^\circ) +$   
 $+ 0,083\sin(1200t - 90^\circ) \text{ (A)}$ .
- 4.6.  $I_2 = 15 \text{ A}$ .
- 4.7.  $P = 710,7 \text{ Вт}$ ;  $Q = 146 \text{ ВАп}$ ;  $S = 737,7 \text{ ВА}$ .
- 4.8.  $I = 6,4 \text{ A}$ .
- 4.9.  $I = 2,635 \text{ A}$ .
- 4.10.  $P = 174,4 \text{ Вт}$ .
- 4.11.  $u(t) = 23\sin(1000t - 36^\circ 30') + 55,7\sin(3000t + 81^\circ) \text{ (В)}$ ;  $P = 18 \text{ Вт}$ ;  
 $Q = 14 \text{ ВАп}$ ;  $S = 64 \text{ ВА}$ .

**4.12.** Для ФНЧ (рис.4.1.а):  $K_U(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$ ;

$$\varphi(\omega) = -\arctg(\omega RC).$$

**4.13.**  $i(t) = 5 + 9,9 \sin(100t + 52^\circ) + 7,3 \sin(300t - 69^\circ)$  (А);  $U_2 = 1,7$  В;

$$P = 201,35 \text{ Вт}; Q = 37,51 \text{ ВАп}; S = 206,9 \text{ ВА}.$$

**4.14.**  $i(t) = 18 \sin(\omega t + 31^\circ) + 15,1 \sin(3\omega t + 41^\circ)$  (А);  $U_{AB} = 347$  В;

$$P = 2790 \text{ Вт}; Q = 293,4 \text{ ВАп}; S = 6112,2 \text{ ВА}.$$

**5.1.**  $i_L(0_-) = i_{R_1}(0_-) = 9$  А;  $i_C(0_-) = i_{R_2}(0_-) = 0$  А;  $i_L(0_+) = 9$  А;

$$i_{R_1}(0_+) = i_{R_2}(0_+) = 3$$
 А;  $i_C(0_+) = 6$  А;  $u_C(0_-) = u_{R_1}(0_-) = 180$  В;

$$u_L(0_-) = u_{R_2}(0_-) = 0$$
 В;  $u_C(0_+) = 180$  В;  $u_{R_2}(0_+) = 120$  В;

$$u_{R_1}(0_+) = 60$$
 В;  $u_L(0_+) = 0$  В.

**5.2.**  $u_{C_1}(0_-) = 50$  В;  $u_{C_2}(0_-) = 100$  В;  $u_{L_2}(0_-) = 0$  В;  $u_{L_2}(0_+) = 25$  В;

$$u_{C_1}(0_+) = u_{C_2}(0_+) = 75$$
 В;  $i_{L_2}(0_-) = 1$  А;  $i_{R_1}(0_-) = i_{R_3}(0_-) = 0,5$  А;

$$i_{R_1}(0_+) = i_{R_2}(0_+) = 0,75$$
 А;  $i_{R_3}(0_+) = 0,25$  А;  $i_{C_1}(0_+) = i_{C_2}(0_+) = 0,25$  А.

**5.3.**  $i_L(0_-) = i_L(0_+) = 10$  А;  $i_C(0_-) = i_{R_2}(0_-) = i_{R_2}(0_+) = 0$  А;

$$i_C(0_+) = 11$$
 А;  $u_C(0_-) = u_C(0_+) = 0$  В;  $u_L(0_-) = u_{R_2}(0_-) = 0$  В;

$$u_{R_1}(0_-) = u_{R_1}(0_+) = 100$$
 В;  $u_L(0_+) = u_{R_2}(0_+) = 0$  В.

**5.4.**  $u_C(t) = 100 - 50 \cdot e^{-500t}$  (В).

**5.5.**  $i(t) = 0,5(1 + e^{-1000t})$  (А).

**5.6.**  $i(t) = 1,5 \cdot e^{-10t} - 0,5 \cdot e^{-30t}$  (А);  $u_L(t) = 15(e^{-30t} - e^{-10t})$  (В);

$$u_C(t) = 5(e^{-30t} - 9 \cdot e^{-10t})$$
 (В).

**5.7.**  $i_L(t) = 3 - 2 \cdot e^{-50t}$  (А).

**5.8.**  $i_L(t) = 4,5 + 0,5 \cdot e^{-2000t} - 2 \cdot e^{-500t}$  (А);

$$i_C(t) = 0,5 \cdot e^{-500t} - 2 \cdot e^{-2000t}$$
 (А);

$$i_2(t) = 4,5 + 2,5(e^{-2000t} - e^{-500t})$$
 (А);

$$u_C(t) = 4,5 + 100(e^{-2000t} - e^{-500t})$$
 (В);

$$u_L(t) = 1000(e^{-500t} - e^{-2000t})$$
 (В).

**5.9.**  $i_1(t) = 3,33 \cdot e^{-100t} - 0,83 \cdot e^{-400t}$  (А);

$$u_L(t) = 33,3(e^{-400t} - e^{-100t})$$
 (В);  $u_C(t) = 8,33(e^{-400t} - 16 \cdot e^{-100t})$  (В).

**5.10.**  $i_2(t) = 0,05(e^{-3000t} - e^{-1000t})$  (А).

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ И РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

---

---

1. *Атабеков Г.И.* Основы теории цепей. – СПб.: Лань, 2009. – 432 с.
2. *Пряшников В.А., Петров Е.А., Осипов Ю.М.* Электротехника и ТОЭ в примерах и задачах. – СПб.: КОРОНА-Век, 2008. – 336 с.
3. *Атабеков Г.И.* Линейные электрические цепи. Ч. 1. – М.: Энергия, 2007. – 592 с.
4. *Иванов И.И., Лукин А.Ф., Соловьев Г.И.* Электротехника. Основные положения, примеры и задачи. – СПб.: Лань, 2002. – 192 с.
5. *Немцов М.В.* Электроника и электротехника: учебник для вузов. – М.: Изд-во МЭИ, 2003. – 616 с.
6. *Лоторейчук Е.А.* Теоретические основы электротехники. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2009. – 320 с.
7. *Иванов И.И., Соловьев Г.И., Равдоник В.С.* Электротехника. – СПб.: Лань, 2003. – 496 с.
8. *Беляев О.В., Быстров М.В., Колданев В.Л. и др.* Основы теории цепей. Примеры и задачи. – М.: Радиотехника, 2007. – 240 с.
9. *Данилов И.А.* Общая электротехника. – М.: Юрайт, 2012. – 673 с.