

# Электрические фильтры

Электрическими фильтрами называются четырехполюсники предназначенные для пропускания сигналов в определенных частотных диапазонах с возможно малым затуханием и подавления сигналов на частотах вне этих диапазонов. Полоса частот, пропускаемых фильтром без затухания или при малом затухании, называется **полосой пропускания** (или **полосой прозрачности**). Полоса частот, пропускаемых фильтром с затуханием называется **полосой задерживания** (**полосой непрозрачности** или **полосой затухания**). Частота, лежащая на границе полос пропускания и задерживания называется **частотой среза** или **граничной частотой**. Качество фильтра считается тем выше, чем ярче выражены его фильтрующие свойства, т. е. чем сильнее возрастает затухание в полосе задерживания.

**Классификация электрических фильтров** может быть проведена по различным признакам.

# Электрические фильтры

**Классификация электрических фильтров** может быть проведена по различным признакам. Например, в зависимости от пропускаемого диапазона частот различают следующие типы фильтров:

- *фильтры нижних частот (ФНЧ)* пропускают сигнал без ослабления на частотах ниже частоты среза;
- *фильтры верхних частот (ФВЧ)* не оказывают влияния на амплитуды сигналов, имеющих частоту выше частоты среза, и не пропускают сигналы с частотой ниже, чем частота среза;
- *полосно-пропускающие фильтры (полосовые) (ППФ)* пропускают сигналы, частота которых находится в интервале между нижней и верхней частотами среза и не пропускают сигналы остальных частот;
- *полосно-заграждающие фильтры (режсекторные) (ПЗФ)* не пропускают сигналы с полосой частот, заключенной в интервале между нижней и верхней частотами среза, а сигналы всех остальных частот пропускают без ослабления.

Классификацию электрических фильтров также проводят по числу реактивных элементов в схеме, по типу передаточной функции, по структуре элементов и т. д.

# Электрические фильтры

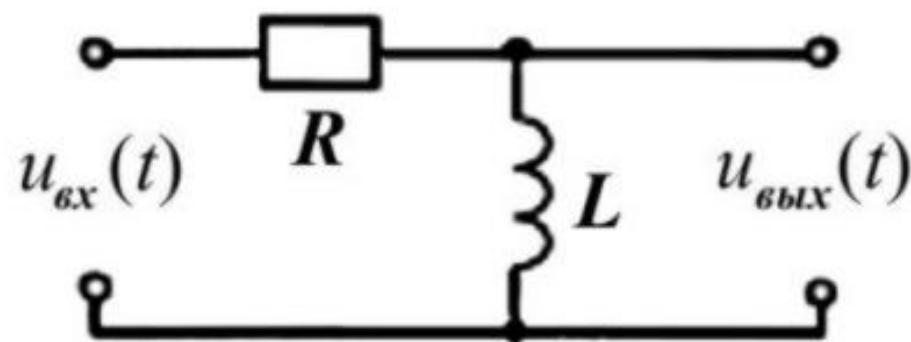
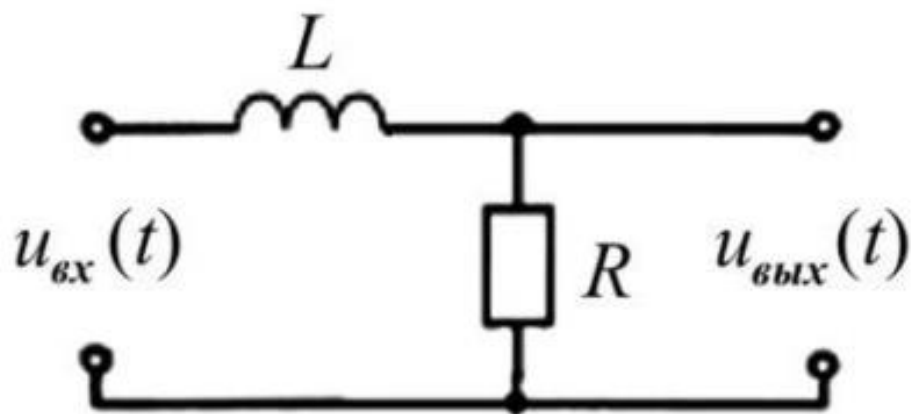
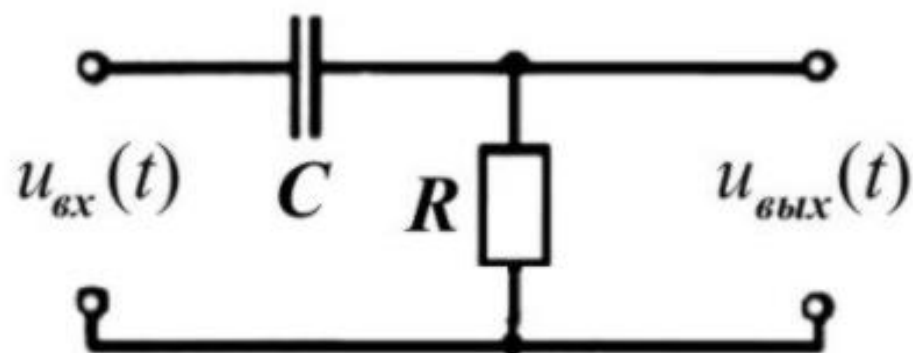
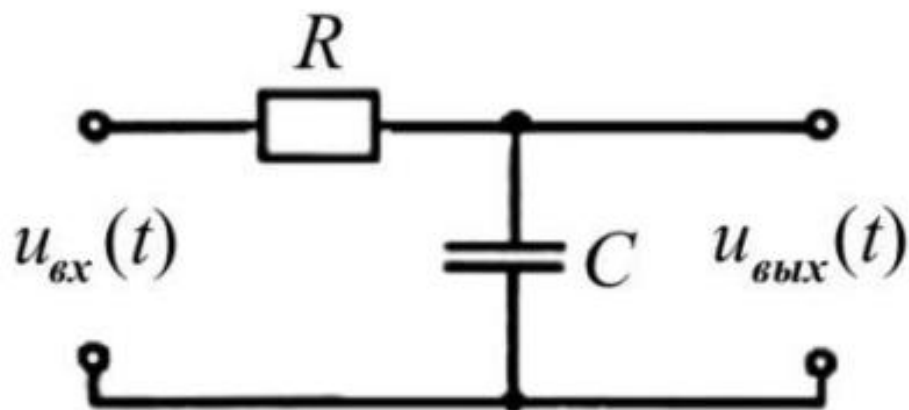
Электрическая цепь, содержащая индуктивность и/или емкость, обладает различными сопротивлениями для различных гармоник, так как индуктивное сопротивление  $X_{Lk} = k\omega L$  увеличивается с увеличением номера гармоники  $k$ , а емкостное  $X_{Ck} = \frac{1}{k\omega C}$  уменьшается.

Это дает возможность при заданной кривой напряжения изменять форму кривой тока путем включения электрического фильтра между источником и потребителем.

Для того, чтобы отфильтровать высшие гармоники несинусоидального напряжения, т. е. не пропустить их к потребителю, последовательно с потребителем включается индуктивность, а параллельно емкость (см. рис.). При этом, чем выше номер гармоники, тем большим сопротивлением обладает индуктивность и тем больше напряжение этой гармоники падает на индуктивном сопротивлении и тем меньшее напряжение поступает на нагрузку. Кроме того, чем выше номер гармоники (частота), тем меньше сопротивление конденсатора, тем больший ток этой частоты проходит через конденсатор, отфильтровываясь от потребителя.



# Электрические фильтры



**Рис.** Фильтры нижних частот

**Рис.** Фильтры верхних частот

Если нужно отфильтровать постоянную составляющую несинусоидального напряжения или его низкие частоты (гармоники), то в фильтрах меняют местами индуктивность и емкость.

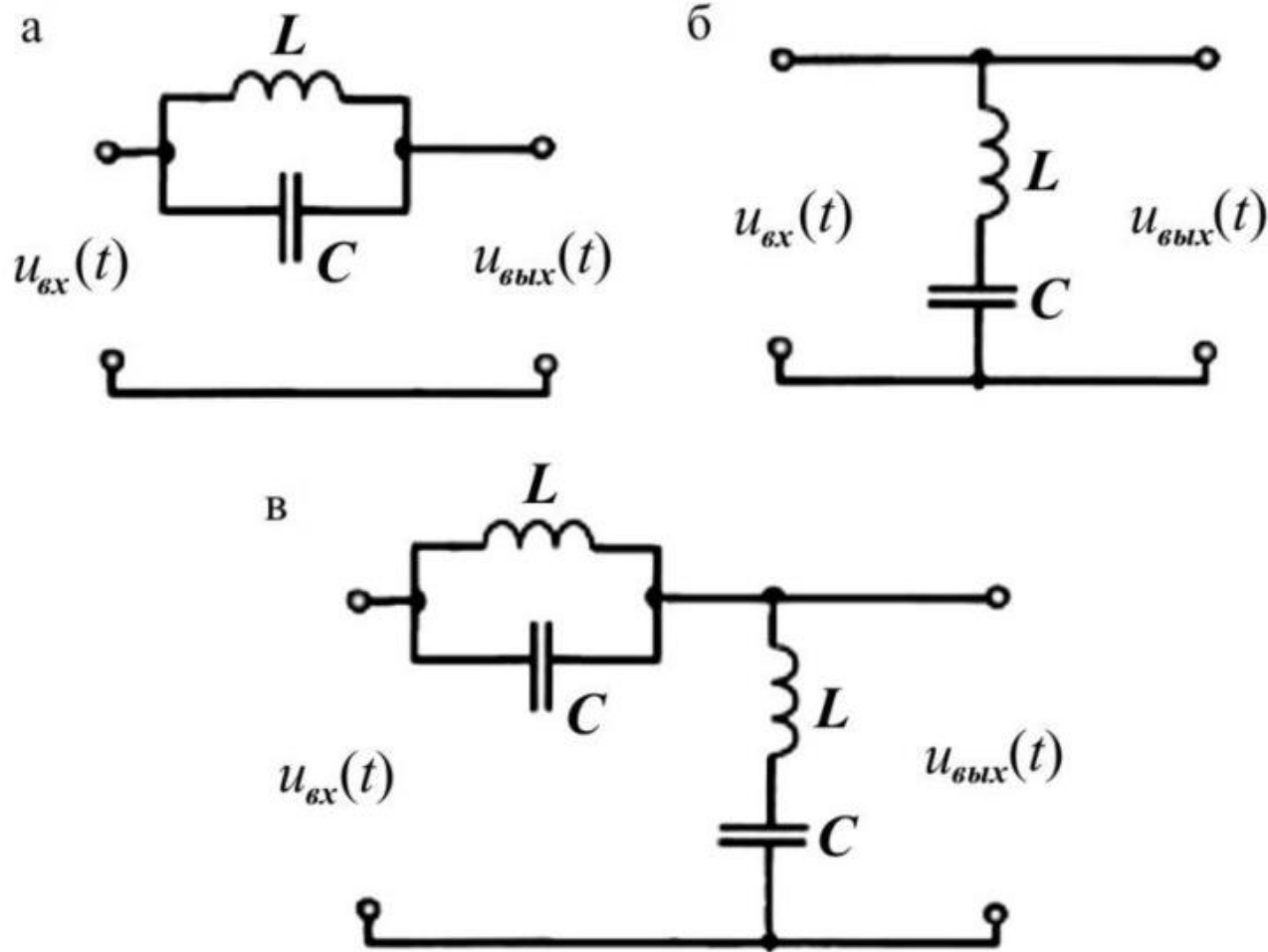
# Электрические фильтры

Если в напряжении, поступающем на вход фильтра, имеется  $k$ -я гармоника, которую нужно не пропустить к потребителю, то последовательно с потребителем можно включить параллельный резонансный контур (рис. а), настроенный в резонанс токов на частоту  $k$ -й гармоники. В результате этого на большом сопротивлении резонансного контура (близкого к бесконечности – при отсутствии активного сопротивления в контуре) напряжение  $k$ -й гармоники падает на контуре, не попадая на нагрузку.

Такого же эффекта можно добиться, если параллельно с потребителем включить последовательный резонансный контур (рис. б), настроенный в резонанс напряжений на частоту  $k$ -й гармоники. При резонансе напряжений сопротивление последовательного колебательного контура мало, следовательно, уменьшается напряжение  $k$ -й гармоники на нем, а значит, и на потребителе.

Одновременное включение обоих колебательных контуров (рис. в) обеспечивает значительно лучшую фильтрацию.

# Электрические фильтры

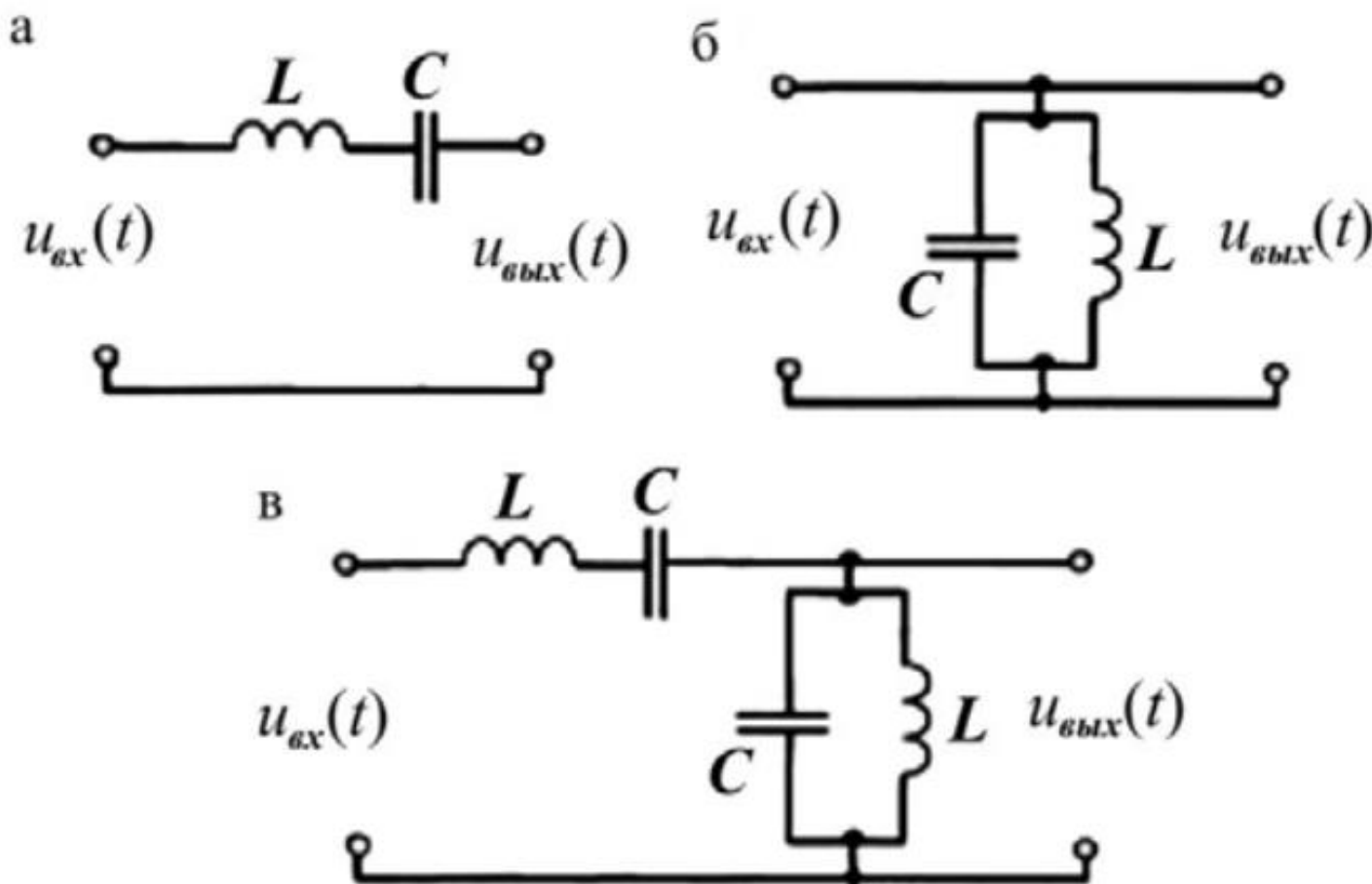


**Рис.** Полосно-заграждающие фильтры

Если нужно уменьшить или устранить сразу несколько гармоник, то включают последовательно или/и параллельно с потребителем несколько колебательных контуров, каждый из которых настраивается в резонанс определенной гармоники.

# Электрические фильтры

Если резонансные контуры поменять местами, то получаются полосовые фильтры, которые, наоборот, служат для того, чтобы пропустить к приемнику  $k$ -ю гармонику, на которую они настроены в резонанс, и не пропустить (ослабить) все другие гармоники.



**Рис.** Полосно-пропускающие фильтры



# АЧХ и ФЧХ фильтра

**Комплексная передаточная функция (коэффициент передачи)  $K(j\omega)$**  находится как отношение выходной электрической величины (напряжения или тока) к входной.

**Различают 4 вида передаточных функций:**

- передаточная функция по напряжению  $\dot{K}_U = \frac{\dot{U}_{\text{ВЫХ}}}{\dot{U}_{\text{ВХ}}}$ ;
- передаточная функция по току  $\dot{K}_I = \frac{\dot{I}_{\text{ВЫХ}}}{\dot{I}_{\text{ВХ}}}$ ;
- передаточное сопротивление  $\dot{K}_Z = \frac{\dot{U}_{\text{ВЫХ}}}{\dot{I}_{\text{ВХ}}}$ ;
- передаточная проводимость  $\dot{K}_Y = \frac{\dot{I}_{\text{ВЫХ}}}{\dot{U}_{\text{ВХ}}}$ ;

**В общем виде** передаточная функция:  $K(j\omega) = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$

Зависимость модуля комплексной передаточной функции от частоты  $K(\omega)$  называется **амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ)**. Частотная зависимость аргумента комплексной передаточной функции от частоты  $\varphi(\omega)$  называется **фазо-частотной характеристикой (ФЧХ)**.

АЧХ и ФЧХ не зависят от значений амплитуд и начальных фаз воздействий, а определяются числом, характером, значениями и видом соединения друг с другом ее элементов. Частотные характеристики (АЧХ и ФЧХ) позволяют судить о том, колебания каких частот пропускаются электрической цепью, а какие ослабляются.



# Частотные характеристики фильтров

Частотные характеристики показывают, какие частоты пропускаются электрической цепью (после прохождения через электрический фильтр), а какие ослабляются. Основными частотными характеристиками электрических фильтров являются частота среза или полоса пропускаемых фильтром частот, коэффициент передачи, крутизна, амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики (АЧХ и ФЧХ).

**Частота среза** – это частота, на которой происходит спад амплитуды выходного сигнала до значения равного 0,7 от входного. Отношение выходной электрической величины (напряжения или тока) к входной позволяет вычислить **комплексную передаточную функцию (коэффициент передачи)**  $\dot{K}(j\omega) = |\dot{K}| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$ . Зависимость модуля комплексной передаточной функции  $|\dot{K}|$  от частоты  $\omega$  называется **амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ)**, а частотная зависимость аргумента комплексной передаточной функции  $\varphi(\omega)$  – **фазо-частотной характеристикой (ФЧХ)**.

АЧХ и ФЧХ не зависят от значений амплитуд и начальных фаз воздействий, а определяются числом, характером, значениями и видом соединения друг с другом ее элементов.

# Частотные характеристики

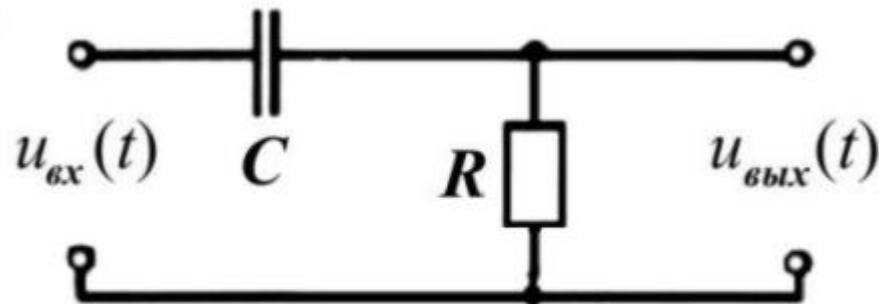
Например, для RC-цепи, изображенной на рис. , комплексная передаточная функция может быть рассчитана так:

$$\dot{K} = \frac{\dot{u}_{\text{вых}}}{\dot{u}_{\text{вх}}} = \frac{R}{R - jX_C} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega RC}}.$$

АЧХ и ФЧХ для этой цепи будут равны, соответственно:

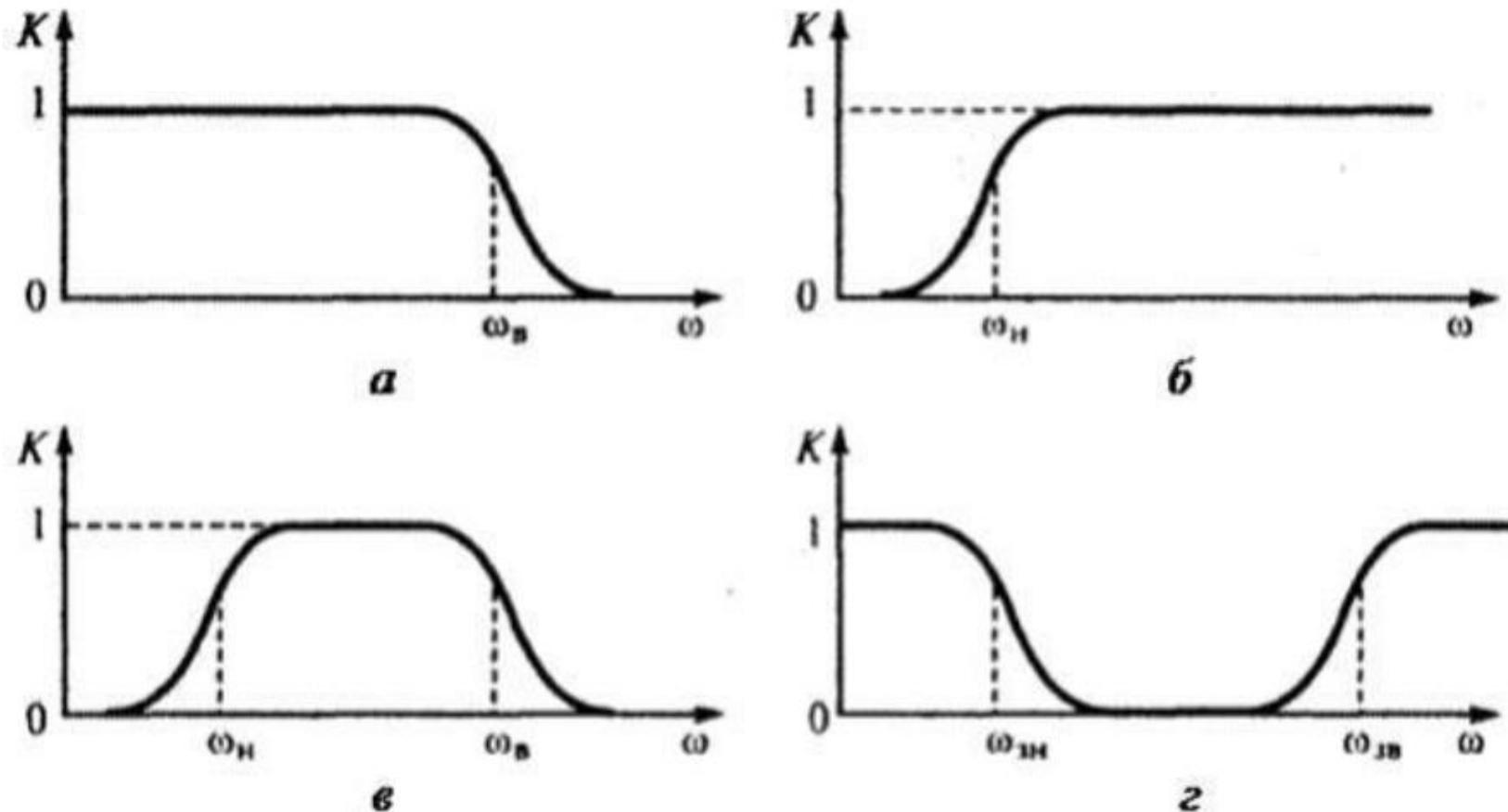
$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega RC)^2}}} \quad \text{и} \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{1}{\omega RC}.$$

Частотные характеристики позволяют судить о том, колебания каких частот пропускаются цепью, а какие ослабляются.



**Рис.** Фильтр верхних частот

# Частотные характеристики



**Рис.** АЧХ пассивных электрических фильтров:

*а* – ФНЧ; *б* – ФВЧ; *в* – ППФ; *г* – ПЗФ

На практике часто приходится строить АЧХ и ФЧХ в логарифмическом масштабе. ЛАЧХ и ЛФЧХ – это зависимость коэффициента модуля комплексной передаточной функции и фазы, соответственно, от частоты в логарифмическом масштабе. В этом случае коэффициент передачи определяют в децибелах (дБ).



# Электрические фильтры

Практическое применение электрических фильтров весьма широко и разнообразно. Они применяются как в радиотехнике и технике связи, где имеют место токи достаточно высоких частот, так и в силовой электронике и электротехнике. Так, в радиоприемнике из сигналов многочисленных радиостанций фильтры выделяют сигнал одной принимаемой станции. В энергетических системах при передаче сигналов телеуправления, телеизмерении и автоконтроля по линиям электропередачи высокого напряжения фильтры отделяют эти сигналы от тока промышленной частоты (50 Гц). В установках частотного телеуправления многими объектами, например на газопроводах, железнодорожном транспорте и др. фильтры выделяют сигналы управления, предназначенные каждому объекту. При организации по воздушным линиям электропроводной связи одновременно несколько телефонных разговоров (высокочастотная телефонная связь) на приемной станции устанавливаются фильтры для разделения телефонных сигналов отдельных абонентов. Кроме того, широкое применение они находят в области распознавания речи.



# Переходные процессы в линейных электрических цепях

Ранее нами рассматривались только **установившиеся режимы** работы линейных электрических цепей, т.е. режимы, которые устанавливаются в цепи при неизменных напряжении, токе, сопротивлении резисторов и др. **Установившиеся режимы** при заданных и неизменных параметрах цепи полностью **определяются только источником энергии**. Следовательно, источники постоянного напряжения (или тока) создают в цепи постоянный ток, а источники переменного напряжения (или тока) – переменный ток той же частоты, что и частота источника энергии.

**Под переходным (динамическим, нестационарным) процессом или режимом** в электрических цепях (содержащих индуктивные и/или ёмкостные элементы) понимается процесс перехода цепи из одного установившегося состояния (режима) в другое.

Задача исследования переходных процессов заключается в том, чтобы выяснить, по какому закону и как долго будет наблюдаться заметное отклонение токов в ветвях и напряжений на участках цепи от их установившихся значений.

# Переходные процессы в линейных электрических цепях

В резистивном элементе  $R$  электрическая энергия превращается в тепло и рассеивается в окружающую среду. В индуктивном элементе накапливается энергия магнитного поля  $W_M = L i_L^2 / 2$ , а в ёмкостном элементе – энергия электрического поля  $W_E = C u_C^2 / 2$ .

Изменения в электрической цепи можно представить в виде тех или иных переключений, называемых в общем случае **коммутацией**.

**При коммутации** происходит изменение суммарной энергии электромагнитного поля цепи. Процесс изменения этой энергии не может происходить мгновенно, т.к. в этом случае мощность источника энергии должна быть бесконечно большой, а таких источников не существует.

Поскольку электромагнитная энергия цепи мгновенно изменяться не может, не могут изменяться мгновенно и обуславливающие её величины – ток в индуктивном элементе  $i_L(t)$  и напряжение  $u_C(t)$  на емкостном элементе. На этом основаны **законы коммутации**.

# Переходные процессы в линейных электрических цепях

Ток в индуктивности  $i_L(t)$  и напряжение на ёмкости  $u_C(t)$  не могут изменяться мгновенно. На этом основаны **законы коммутации**:

- **Первый закон коммутации** состоит в том, что ток в ветви с индуктивным элементом в начальный момент времени после коммутации имеет то же значение, какое он имел непосредственно перед коммутацией, а затем с этого значения он начинает плавно изменяться:

$$i_L(0_-) = i_L(0_+)$$

- **Второй закон коммутации** состоит в том, что напряжение на ёмкостном элементе в начальный момент времени после коммутации имеет то же значение, какое он имел непосредственно перед коммутацией, а затем с этого значения оно начинает плавно изменяться:

$$u_C(0_-) = u_C(0_+)$$

# **Переходные процессы в линейных электрических цепях**

Переходные процессы могут возникать при любых изменениях режима работы электрической цепи (при подключении и отключении источников, при изменении нагрузки, при обрыве проводов и др.), если в цепи имеются индуктивные и/или емкостные элементы.

## **Законы коммутации:**

$$i_L(0_-) = i_L(0_+), \quad u_C(0_-) = u_C(0_+).$$



# Переходные процессы в линейных электрических цепях

В электрической цепи, содержащей индуктивные и/или емкостные элементы, при любых изменениях ее режима работы: включении, выключении, коротком замыкании, колебаниях величины какого-либо параметра и т.п. — возникают **переходные процессы**, которые не могут протекать мгновенно, т.к. невозможно мгновенное изменение энергии, запасенной в электромагнитном поле цепи. Таким образом, переходный процесс обусловлен несоответствием величины запасенной энергии в магнитном поле катушки и в электрическом поле конденсатора её значению для нового состояния цепи.

Переходные процессы в реальных электрических цепях являются **быстропротекающими**: их продолжительность обычно составляет десятые, сотые или даже миллионные доли секунды. Сравнительно редко длительность этих процессов достигает единицы секунды.

Естественно возникает вопрос, надо ли вообще принимать во внимание переходные режимы, имеющие столь короткую длительность.

# Переходные процессы в линейных электрических цепях

В различных условиях **роль** переходных процессов в электрических цепях **неодинакова**. Особенно велико их значение в устройствах, предназначенных для усиления, формирования и преобразования импульсных сигналов, когда длительность воздействующих на электрическую цепь сигналов соизмерима с продолжительностью переходных режимов.

Переходные процессы являются причиной искажения формы импульсов при прохождении их через линейные цепи. Расчет и анализ устройств автоматики, где происходит непрерывная смена состояния электрических цепей, немыслим без учета переходных режимов.

В ряде устройств возникновение переходных процессов, в принципе, нежелательно и опасно. Расчет переходных режимов в этих случаях позволяет определить возможные перенапряжения и увеличения токов, которые во много раз могут превышать напряжения и токи стационарного режима. **Это особенно важно** для цепей со значительной индуктивностью или большой емкостью.

# **Переходные процессы в линейных электрических цепях**

**При переходных процессах** могут возникать большие перенапряжения, сверхтоки, электромагнитные колебания, которые могут нарушить работу устройства вплоть до выхода его из строя.

С другой стороны, переходные процессы находят полезное практическое применение, например, в различного рода электронных генераторах.

Целью изучения переходных процессов является правильный выбор параметров электрических цепей, обеспечивающих ослабление вредного влияния процесса, или, наоборот, усиление его полезного действия.

Всё это обуславливает необходимость изучения методов анализа **нестационарных режимов работы** электрической цепи.

# Основные методы анализа переходных процессов в линейных цепях

- 1. Классический метод**, заключающийся в непосредственном интегрировании дифференциальных уравнений, описывающих изменения токов и напряжений на участках цепи в переходном процессе.
- 2. Операторный метод**, заключающийся в решении системы алгебраических уравнений относительно изображений искомых переменных с последующим переходом от найденных изображений к оригиналам (основан на применении преобразования Лапласа).
- 3. Частотный (спектральный) метод**, основанный на преобразовании Фурье (и находящий широкое применение при решении задач синтеза).
- 4. Метод расчета с помощью интеграла наложения (Дюамеля)**, используемый при сложной форме кривой возмущающего воздействия.
- 5. Метод переменных состояния**, представляющий собой упорядоченный способ определения электромагнитного состояния цепи на основе решения системы дифференциальных уравнений первого порядка, записанных в нормальной форме (форме Коши) (используется замена дифференциального уравнения  $n$ -го порядка  $n$  уравнениями первого порядка).

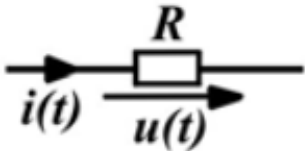
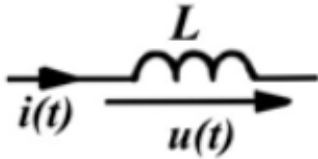
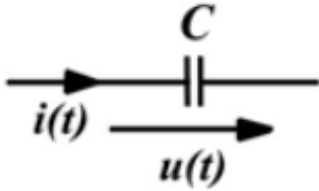


# Классический метод расчета переходных процессов в линейных электрических цепях

Классический метод заключается в непосредственном интегрировании дифференциальных уравнений, описывающих изменения токов и напряжений на участках цепи в переходном процессе.

В общем случае при использовании классического метода расчета переходных процессов в электрической цепи составляются уравнения электромагнитного состояния цепи по законам Ома и Кирхгофа для мгновенных значений напряжений и токов, связанных между собой на отдельных элементах цепи соотношениями, приведенными в таблице 1.

Таблица 1

		
$u(t) = R \cdot i(t),$ $i(t) = \frac{u(t)}{R}$	$u(t) = L \frac{di(t)}{dt},$ $i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(t) dt + i(0)$	$u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + u(0),$ $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$

1. Рассчитывается цепь до коммутации и определяются токи в индуктивностях и напряжения на емкостях. НУ.
2. Составляется система уравнений для мгновенных значений токов и напряжений рассматриваемой цепи **после коммутации**, используя законы Кирхгофа и следующие соотношения для отдельных элементов цепи:

$$u_R = R i_R, \quad u_L(t) = L \frac{d i_L(t)}{dt}, \quad i_L(t) = \frac{1}{L} \int u_L(t) dt,$$

$$i_C(t) = C \frac{d u_C(t)}{dt}, \quad u_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt.$$

3. Эту систему уравнений путем замены переменных сводят к дифференциальному уравнению n-го порядка относительно искомой величины ( $i_L, u_C$ ):

$$\frac{d^n i_L}{d t^n} + a_1 \frac{d^{n-1} i_L}{d t^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{d i_L}{d t} + a_n i_L = f(t).$$

4. Общее решение дифференциального уравнения ищется в виде:

$$i_L(t) = i_{L_{cs}}(t) + i_{L_{rp}}(t), \quad i_{L_{rp}}(t) = i_L(t \rightarrow \infty),$$

$$\frac{d^n i_{L_{cs}}}{d t^n} + a_1 \frac{d^{n-1} i_{L_{cs}}}{d t^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{d i_{L_{cs}}}{d t} + a_n i_{L_{cs}} = 0,$$

$$i_{L_{cs}}(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}, \quad \frac{d^n i_L(t)}{d t^n} = p^n.$$

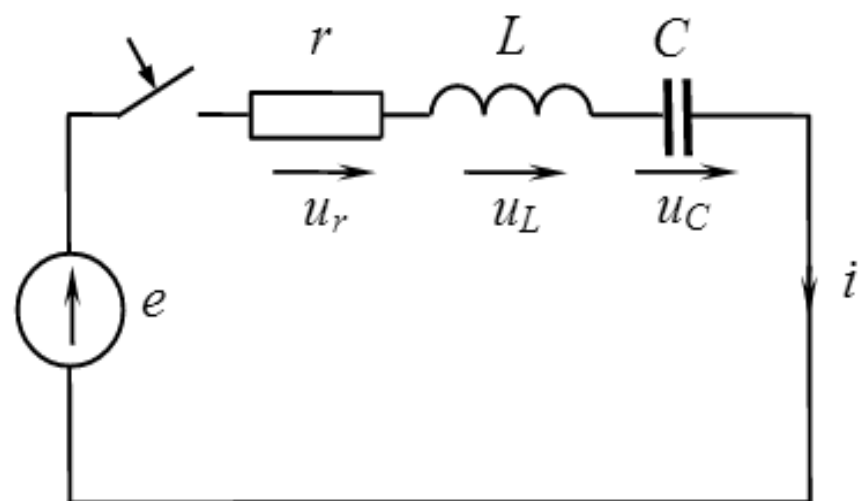
# Расчет переходных процессов классическим методом

$$\frac{d^n i_{L_{ce}}}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} i_{L_{ce}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{d i_{L_{ce}}}{dt} + a_n i_{L_{ce}} = 0,$$

$$i_{L_{ce}}(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}, \quad \frac{d^n i_L(t)}{dt^n} = p^n.$$

Вид корней характеристического уравнения	Выражение для свободной составляющей
Корни $p_1, p_2, \dots, p_n$ вещественные и различные	$\sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}$
Корни $p_1, p_2, \dots, p_n$ вещественные и $p_1 = p_2 = \dots = p_m = p$ ( $m < n$ )	$\sum_{k=1}^m A_k t^{k-1} e^{pt} + \sum_{k=m+1}^n A_k e^{p_k t}$
Пары комплексно-сопряженных корней $p_{k,k+1} = -\delta_k \pm j\omega_k$	$\sum_{k=1}^n A_k e^{-\delta_k t} \sin(\omega_k t + \psi_k)$

# Расчет переходных процессов классическим методом



Рассмотрим два случая:

а) источник постоянной ЭДС  $e(t) = E$ ;

б) источник синусоидальной ЭДС

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi).$$

1)  $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$ ,  $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$  - начальные условия.

$$2) u_r + u_L + u_C = e \quad u_r = ri_r; \quad u_L = L \frac{di_L}{dt}; \quad u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt.$$

$$3) ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = e.$$

Подставив  $i = C \frac{du_C}{dt}$ , получим  $LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + rC \frac{du_C}{dt} + u_C = e.$

# Расчет переходных процессов классическим методом

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + rC \frac{du_C}{dt} + u_C = E$$

$$4) u_C(t) = u_{Cnp}(t) + u_{Cсв}(t).$$

$$u_{Cnp}(t) = E.$$

$$LCp^2 + rCp + 1 = 0,$$

$$p_{1,2} = -\frac{r}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

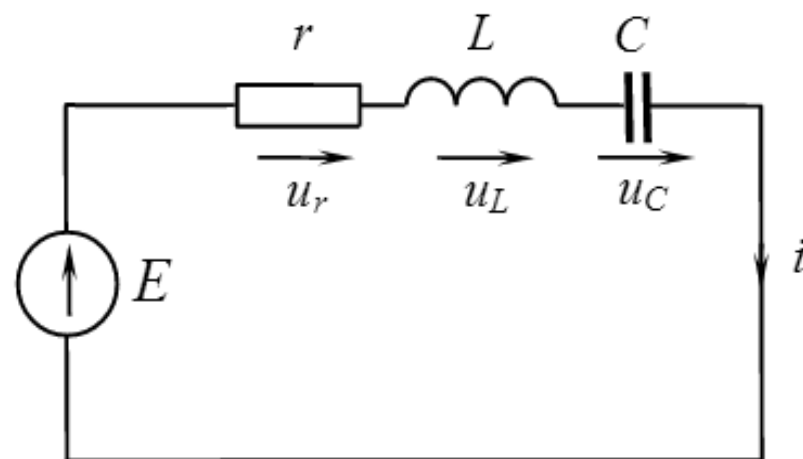
$$u_{Cсв}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

$$u_C(t) = E + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

$$1) i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0, \quad u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0 \quad - \text{начальные условия.}$$

$$i = C \frac{du_C}{dt}, \quad \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{0_+} = \frac{i(0_+)}{C} = 0, \quad 0 = p_1 A_1 + p_2 A_2, \quad u_C(0_+) - E = A_1 + A_2;$$

$$A_1 = (E - u_C(0_+)) \frac{p_2}{p_1 - p_2}; \quad A_2 = (E - u_C(0_+)) \frac{p_1}{p_2 - p_1}.$$





# Расчет переходных процессов классическим методом

Таким образом, напряжение на конденсаторе в переходном процессе

$$u_C(t) = E + (E - u_C(0_+)) \cdot \left( \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} - \frac{p_1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t} \right).$$

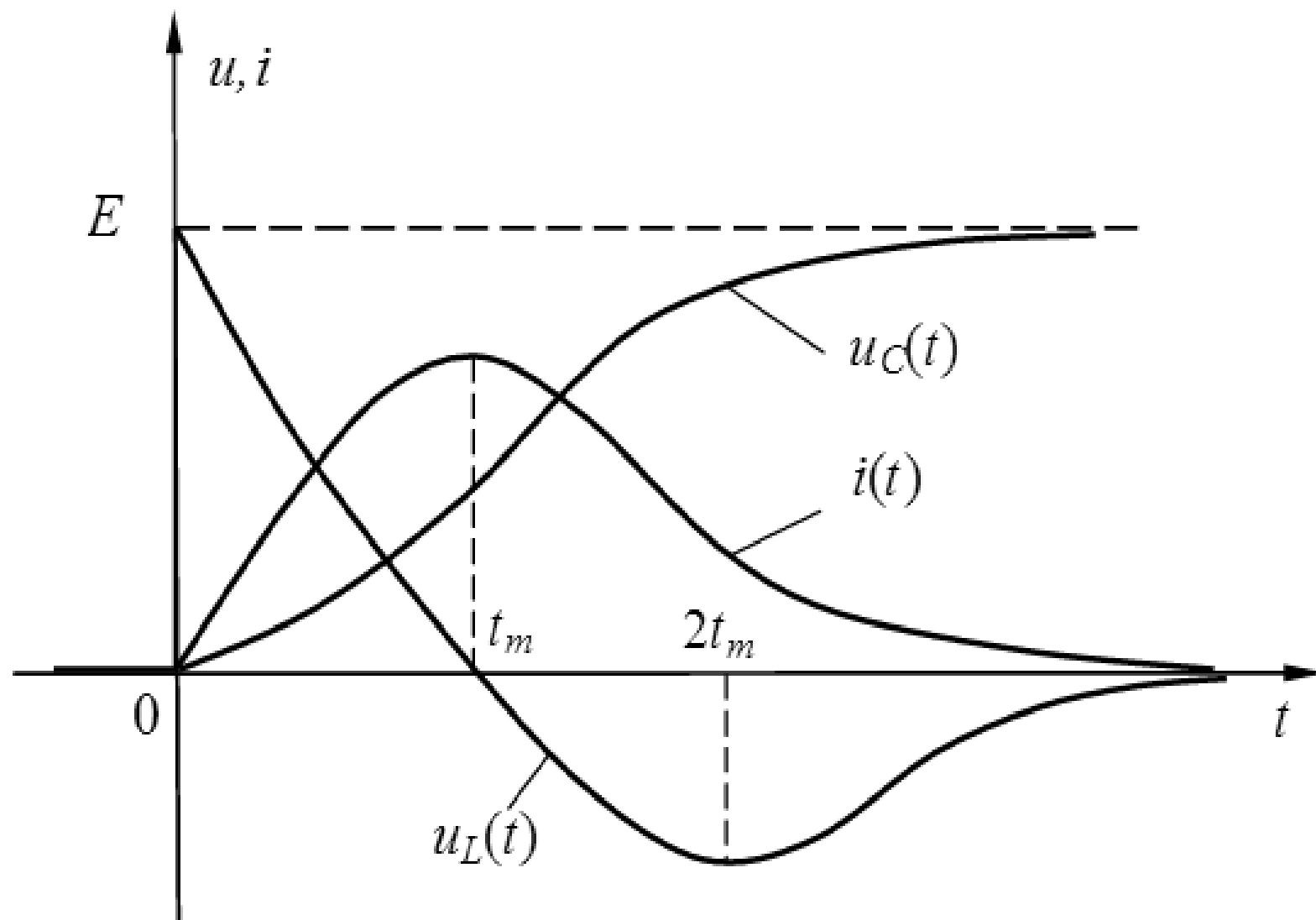
Ток переходного процесса

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{du_C}{dt} = C(E - u_C(0_+)) \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = \\ &= (E - u_C(0_+)) \frac{e^{p_1 t} - e^{p_2 t}}{L(p_1 - p_2)}. \end{aligned}$$

Напряжение на катушке индуктивности

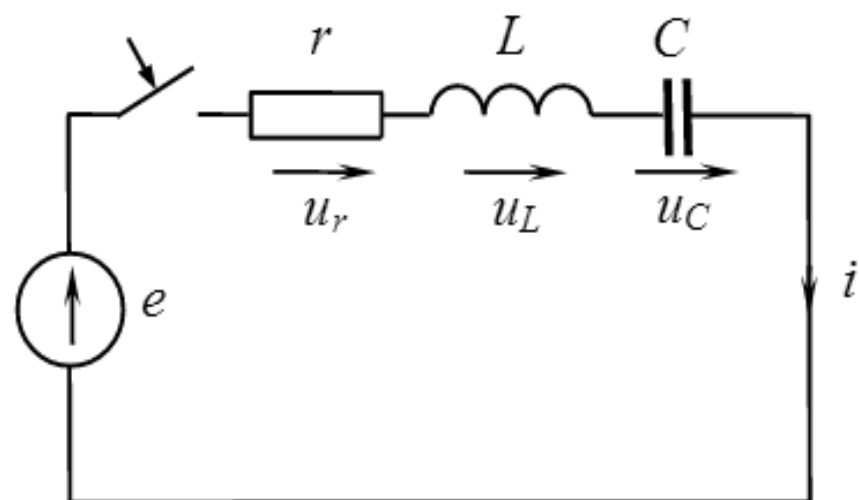
$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = (E - u_C(0_+)) \frac{p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}}{p_1 - p_2}.$$

# Расчет переходных процессов классическим методом



при нулевых начальных условиях  $i(0_+) = 0$ ;  $u_C(0_+) = 0$

# Расчет переходных процессов классическим методом



Рассмотрим два случая:

а) источник постоянной ЭДС  $e(t) = E$ ;

б) источник синусоидальной ЭДС

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi).$$

1)  $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$ ,  $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$  - начальные условия.

$$2) u_r + u_L + u_C = e \quad u_r = ri_r; \quad u_L = L \frac{di_L}{dt}; \quad u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt.$$

$$3) ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = e.$$

Подставив  $i = C \frac{du_C}{dt}$ , получим  $LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + rC \frac{du_C}{dt} + u_C = e.$

# Расчет переходных процессов классическим методом

В случае *б* при подключении *r-L-C*-цепи к источнику синусоидальной ЭДС

$$\dot{I}_{np} = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}} = \frac{E e^{j\psi}}{r + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{E e^{j\psi}}{Z e^{j\varphi}} = I e^{j(\psi - \varphi)}$$

и

$$\dot{U}_{Cnp} = -j \frac{1}{\omega C} \dot{I}_{np} = \frac{I}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j(\psi - \varphi)} = U_C e^{j(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2})},$$

где  $E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$ ;  $Z = \sqrt{r^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$ ;  $\varphi = \text{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}$ .

Таким образом, учитывая, что амплитудные значения синусоидальных величин  $I_m = \sqrt{2}I$  и  $U_{Cm} = \sqrt{2}U_C$ , получаем

$$i_{np}(t) = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi); \quad u_{Cnp}(t) = U_{Cm} \sin(\omega t + \psi - \varphi + \frac{\pi}{2}).$$

1. Рассчитывается цепь до коммутации и определяются токи в индуктивностях и напряжения на емкостях. НУ.
2. Составляется система уравнений для мгновенных значений токов и напряжений рассматриваемой цепи **после коммутации**, используя законы Кирхгофа и следующие соотношения для отдельных элементов цепи:

$$u_R = R i_R, \quad u_L(t) = L \frac{d i_L(t)}{dt}, \quad i_L(t) = \frac{1}{L} \int u_L(t) dt,$$

$$i_C(t) = C \frac{d u_C(t)}{dt}, \quad u_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt.$$

3. Эту систему уравнений путем замены переменных сводят к дифференциальному уравнению n-го порядка относительно искомой величины ( $i_L, u_C$ ):

$$\frac{d^n i_L}{d t^n} + a_1 \frac{d^{n-1} i_L}{d t^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{d i_L}{d t} + a_n i_L = f(t).$$

4. Общее решение дифференциального уравнения ищется в виде:

$$i_L(t) = i_{L_{cs}}(t) + i_{L_{rp}}(t), \quad i_{L_{rp}}(t) = i_L(t \rightarrow \infty),$$

$$\frac{d^n i_{L_{cs}}}{d t^n} + a_1 \frac{d^{n-1} i_{L_{cs}}}{d t^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{d i_{L_{cs}}}{d t} + a_n i_{L_{cs}} = 0,$$

$$i_{L_{cs}}(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}, \quad \frac{d^n i_L(t)}{d t^n} = p^n.$$



# Расчет переходных процессов классическим методом

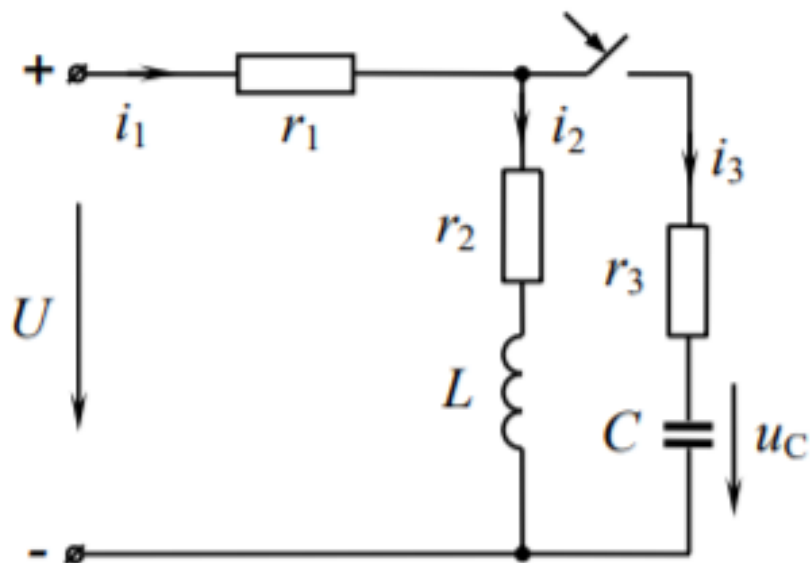
Значения токов и напряжений на элементах цепи в начальный момент времени ( $t = 0_+$ ) называются **начальными условиями (НУ)**. Начальные условия принято делить на независимые и зависимые.

**К независимым начальным условиям** относятся ток в катушке индуктивности  $i_L(0_+)$  и напряжение на конденсаторе  $u_C(0_+)$  в момент коммутации. Независимые начальные условия определяются на основании законов коммутации из расчета докоммутационного установившегося режима в цепи.

**При нулевых начальных условиях** токи в индуктивных элементах и напряжения на ёмкостных элементах цепи начнут изменяться с нуля, **при ненулевых** — с тех значений, которые они имели непосредственно до коммутации.

**Зависимыми начальными условиями** называются значения остальных токов и напряжений цепи в начальный момент времени, а также производных от искомой функции в момент коммутации. Они определяются по независимым начальным условиям с помощью уравнений по законам Кирхгофа, записанных для момента времени  $t = 0_+$ .

# Расчет переходных процессов классическим методом



В схеме на рис. определим значения токов и производных  $\frac{di_2(t)}{dt}$  и  $\frac{du_C(t)}{dt}$  в момент времени  $t = 0_+$  при условии, что до коммутации конденсатор был не заряжен.

В соответствии с законами коммутации независимые начальные условия:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0;$$

$$i_2(0_+) = i_2(0_-) = \frac{U}{r_1 + r_2}.$$

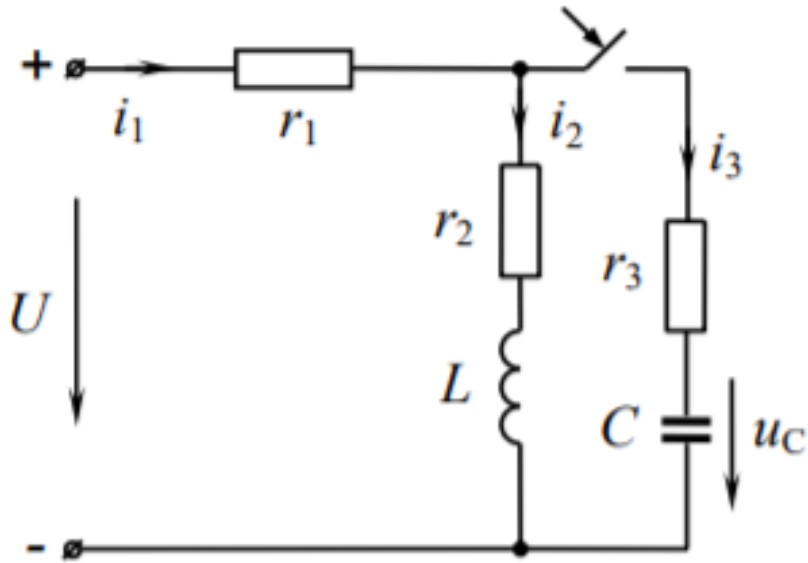
На основании второго закона Кирхгофа для начального момента времени  $t = 0_+$  имеем:

$$r_1(i_2(0_+) + i_3(0_+)) + r_3 i_3(0_+) + u_C(0_+) = U. \quad i_3(0_+) = \frac{U - u_C(0_+) - r_1 i_2(0_+)}{r_1 + r_3};$$

Откуда получаем зависимые НУ:

$$i_1(0_+) = i_2(0_+) + i_3(0_+).$$

# Расчет переходных процессов классическим методом



В схеме на рис. определим значения токов и производных  $\frac{di_2(t)}{dt}$  и  $\frac{du_C(t)}{dt}$  в момент времени  $t = 0_+$  при условии, что до коммутации конденсатор был не заряжен.

Для известных значений  $i_1(0_+)$  и  $i_2(0_+)$  из уравнения:

$$r_1 i_1(0_+) + r_2 i_2(0_+) + L \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{0_+} = U$$

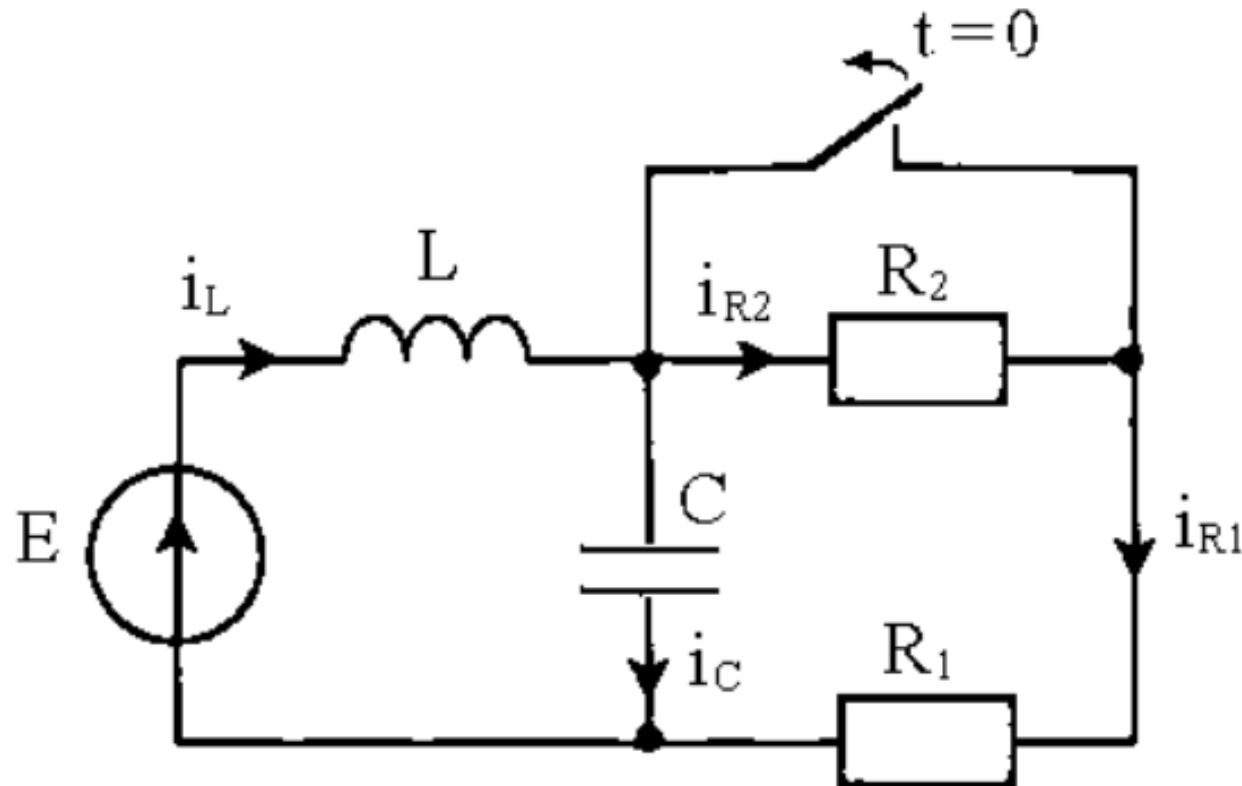
определяем значение:  $\left. \frac{di_2}{dt} \right|_{0_+} = \frac{U - r_1 i_1(0_+) - r_2 i_2(0_+)}{L}.$

Значение производной от напряжения на конденсаторе в момент времени  $t = 0_+$ :

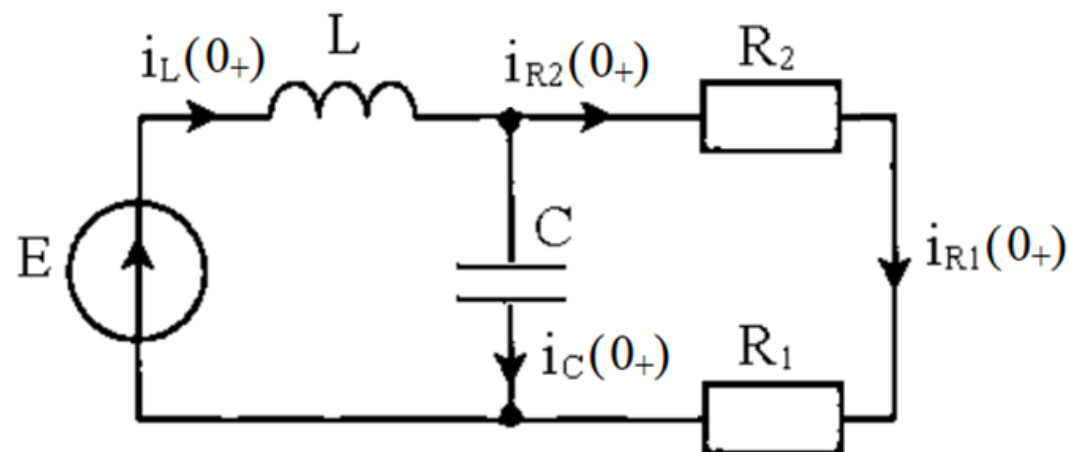
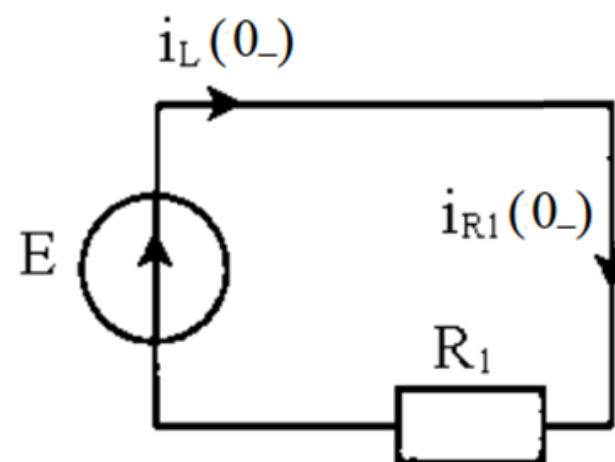
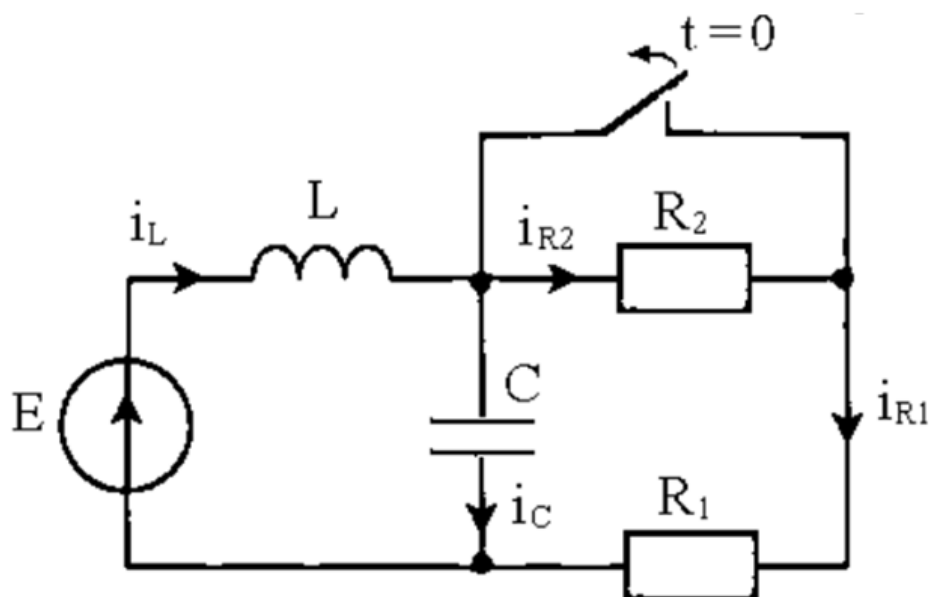
$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{0_+} = \frac{i_3(0_+)}{C}.$$

# Переходные процессы в линейных электрических цепях

**5.1.** Для электрической цепи, схема которой приведена ниже, найдите мгновенные значения токов и напряжений во всех элементах цепи до размыкания ключа (при  $t = 0_-$ ) и сразу после размыкания (при  $t = 0_+$ ). Параметры элементов цепи имеют следующие значения:  $E = 180 \text{ В}$ ,  $L = 0,1 \text{ Гн}$ ,  $C = 10 \text{ мкФ}$ ,  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 40 \text{ Ом}$ .

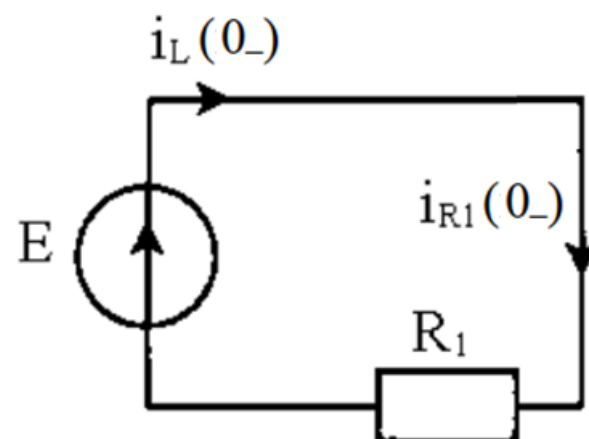
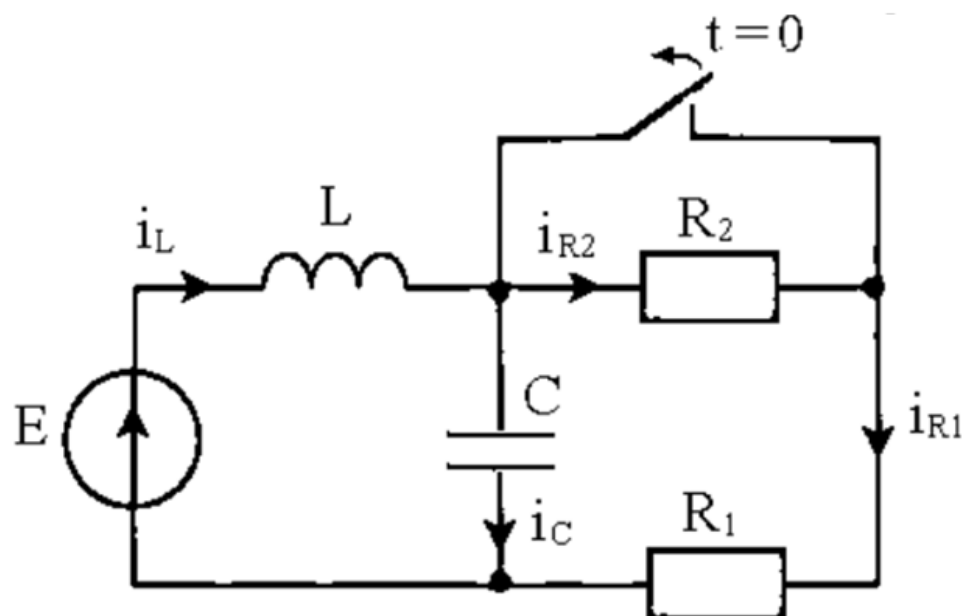


**5.1.** Для электрической цепи, схема которой приведена ниже, найдите мгновенные значения токов и напряжений во всех элементах цепи до размыкания ключа (при  $t = 0_-$ ) и сразу после размыкания (при  $t = 0_+$ ). Параметры элементов цепи имеют следующие значения:  $E = 180 \text{ В}$ ,  $L = 0,1 \text{ Гн}$ ,  $C = 10 \text{ мкФ}$ ,  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 40 \text{ Ом}$ .





**5.1.** Для электрической цепи, схема которой приведена ниже, найдите мгновенные значения токов и напряжений во всех элементах цепи до размыкания ключа (при  $t = 0_-$ ) и сразу после размыкания (при  $t = 0_+$ ). Параметры элементов цепи имеют следующие значения:  $E = 180 \text{ В}$ ,  $L = 0,1 \text{ Гн}$ ,  $C = 10 \text{ мкФ}$ ,  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 40 \text{ Ом}$ .



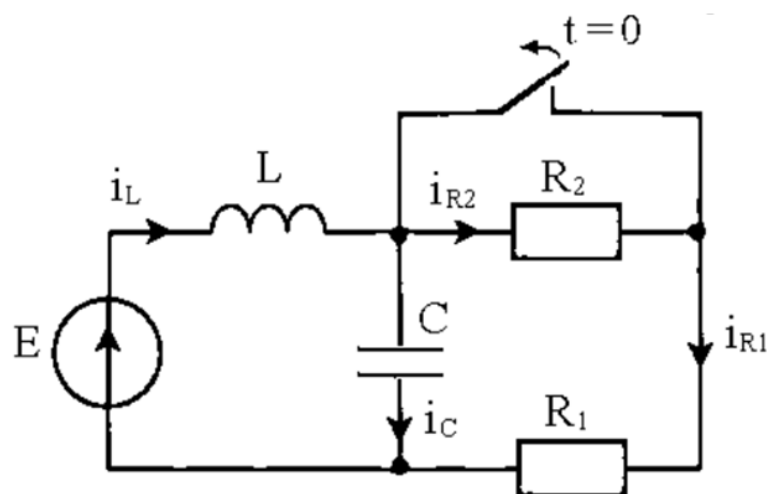
$$i_L(0_-) = i_{R_1}(0_-) = \frac{E}{R_1} = \frac{180}{20} = 9 \text{ А};$$

$$i_C(0_-) = i_{R_2}(0_-) = 0 \text{ А};$$

$$u_C(0_-) = u_{R_1}(0_-) = 180 \text{ В};$$

$$u_L(0_-) = u_{R_2}(0_-) = 0 \text{ В};$$

**5.1.** Для электрической цепи, схема которой приведена ниже, найдите мгновенные значения токов и напряжений во всех элементах цепи до размыкания ключа (при  $t = 0_-$ ) и сразу после размыкания (при  $t = 0_+$ ). Параметры элементов цепи имеют следующие значения:  $E = 180 \text{ В}$ ,  $L = 0,1 \text{ Гн}$ ,  $C = 10 \text{ мкФ}$ ,  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 40 \text{ Ом}$ .

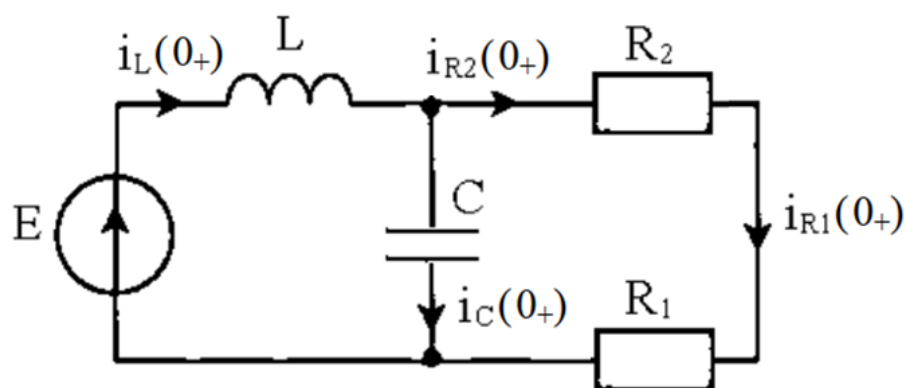


$$i_L(0_-) = i_{R_1}(0_-) = \frac{E}{R_1} = \frac{180}{20} = 9 \text{ А};$$

$$i_C(0_-) = i_{R_2}(0_-) = 0 \text{ А};$$

$$u_C(0_-) = u_{R_1}(0_-) = 180 \text{ В};$$

$$u_L(0_-) = u_{R_2}(0_-) = 0 \text{ В};$$



$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 9 \text{ А};$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 180 \text{ В};$$

$$i_{R_1}(0_+) = i_{R_2}(0_+) = \frac{u_C(0_+)}{R_1 + R_2} = \frac{180}{20 + 40} = 3 \text{ А};$$

$$u_{R_1}(0_+) = i_{R_1}(0_+) \cdot R_1 = 3 \cdot 20 = 60 \text{ В};$$

$$u_{R_2}(0_+) = i_{R_2}(0_+) \cdot R_2 = 3 \cdot 40 = 120 \text{ В};$$

$$i_C(0_+) = i_L(0_+) - i_{R_2}(0_+) = 9 - 3 = 6 \text{ А};$$

$$u_L(0_+) = 0 \text{ В}.$$

# Расчет переходных процессов классическим методом

**Определение постоянных интегрирования** зависит от количества реактивных элементов (индуктивностей и емкостей, способных накапливать энергию) в электрической цепи:

**1. Цепь первого порядка** имеет характеристическое уравнение первой степени с одним корнем  $p$ . Выражение свободной составляющей при этом  $x_{св}(t) = Ae^{pt}$ . Подстановка  $t = 0_+$  даёт:

$$x_{св}(0_+) = Ae^{p \cdot 0_+} = Ae^0 = A \cdot 1 = A.$$

Таким образом, постоянная интегрирования  $A$  в этом случае определяется по значению свободной составляющей:  $A = x_{св}(0_+)$ .

**2. Цепь второго порядка** имеет характеристическое уравнение второй степени (квадратное уравнение) с двумя корнями.

- Если корни уравнения  $p_1$  и  $p_2$  действительные и не равны друг другу, выражение свободной составляющей имеет вид:

$$x_{св}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

# Расчет переходных процессов классическим методом

- Если корни уравнения  $p_1$  и  $p_2$  действительные и не равны друг другу, выражение свободной составляющей имеет вид:

$$x_{св}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

В этом случае для нахождения свободной составляющей необходимо определить две постоянных интегрирования  $A_1$  и  $A_2$ . Следовательно, необходимо получить еще одно уравнение, связывающее искомые величины. Для этого **продифференцируем по времени уравнение для свободной составляющей**:

$$\frac{dx_{св}}{dt} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}.$$

Подстановка  $t = 0_+$  в уравнения для  $x_{св}$  и  $\frac{dx_{св}(t)}{dt}$  даёт:

$$x_{св}(0+) = A_1 + A_2;$$
$$\left. \frac{dx_{св}}{dt} \right|_{0_+} = p_1 A_1 + p_2 A_2.$$

Совместное решение этих уравнений дает искомые постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$ .

# Расчет переходных процессов классическим методом

- Если корни уравнения  $p_1 = p_2 = p$  действительные и равные друг другу, выражение свободной составляющей имеет вид:

$$x_{св}(t) = (A_1 + A_2 t)e^{pt}.$$

В этом случае нужно определить две постоянных интегрирования  $A_1$  и  $A_2$ .

Продифференцируем по времени уравнение для свободной составляющей:

$$\frac{dx_{св}}{dt} = pA_1 e^{pt} + A_2 e^{pt} + pA_2 t e^{pt}.$$

Подстановка  $t = 0_+$  в уравнения для  $x_{св}$  и  $\frac{dx_{св}(t)}{dt}$  даёт:

$$x_{св}(0_+) = A_1;$$

$$\left. \frac{dx_{св}}{dt} \right|_{0_+} = pA_1 + A_2.$$

Совместное решение этих уравнений даёт искомые постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$ .



# Расчет переходных процессов классическим методом

- Если корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные  $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0$ , выражение свободной составляющей имеет вид:

$$x_{св}(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \psi).$$

Здесь  $\delta$  – коэффициент затухания;  $\omega_0$  – угловая частота.

В этом случае нужно определить две постоянных интегрирования  $A$  и  $\psi$ .

Дифференцируя по времени выражение для свободной составляющей, получим:

$$\frac{dx_{св}}{dt} = -A\delta e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \psi) + A\omega_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \psi).$$

Подстановка  $t = 0_+$  в уравнения для  $x_{св}$  и  $\frac{dx_{св}(t)}{dt}$  даёт:

$$x_{св}(0_+) = A \sin \psi;$$

$$\left. \frac{dx_{св}}{dt} \right|_{0_+} = -A\delta \sin \psi + A\omega_0 \cos \psi.$$

Совместное решение этих уравнений дает искомые постоянные интегрирования  $A$  и  $\psi$ .

# Расчет переходных процессов классическим методом

Важной характеристикой при исследовании переходных процессов является **постоянная времени  $\tau$** , которая, например, для цепей с одним накопительным элементом определяется как:

$$\tau = \left| \frac{1}{p} \right|, \quad \text{где } p \text{ — корень характеристического уравнения.}$$

**Постоянную времени** можно интерпретировать как временной интервал, в течение которого **свободная составляющая уменьшится в  $e$  раз** ( $e = 2,72$ ) по сравнению со своим начальным значением. Теоретически переходный процесс длится бесконечно долго, однако на практике считается, что он заканчивается примерно при  $(3 \div 5)\tau$ .

В классическом методе послекоммутационный режим рассматривается как наложение друг на друга двух режимов — **принужденного**, длящегося теоретически бесконечно долго, и **свободного**, имеющего место только в течение переходного процесса. Поскольку принцип наложения справедлив только для линейных систем, метод решения, основанный на указанном разложении, может применяться **только для линейных цепей**.

# **Расчет переходных процессов классическим методом**

Главная трудность в решении задач классическим методом для уравнений высоких порядков состоит в отыскании корней характеристического уравнения и постоянных интегрирования.

Поэтому для решения уравнений порядка выше второго применяют другие методы, в частности операторный метод, основанный на применении преобразования Лапласа и исключающий трудоемкую процедуру отыскания постоянных интегрирования.

# Расчет переходных процессов операторным методом

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad - \text{ прямое преобразование Лапласа.}$$

$f(t)$  – оригинал функции,  $F(p)$  – изображение функции.

$$L[f(t)] = F(p), \quad L^{-1}[F(p)] = f(t).$$

# Операторный метод расчета переходных процессов

Сущность операторного метода заключается в том, что функции времени  $f(t)$ , которую называют **оригиналом**, ставится в соответствие функция  $F(p)$ , которую называют **изображением**. Новая переменная  $p = s + j\omega$  является комплексной переменной.

Изображение  $F(p)$  заданной функции  $f(t)$  определяется в соответствии с **прямым преобразованием Лапласа**:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Сокращенно соответствие между изображением  $F(p)$  и оригиналом  $f(t)$  обозначается как:

$$F(p) \doteq f(t).$$

Следует отметить, что если оригинал  $f(t)$  увеличивается с ростом  $t$ , то для сходимости интеграла необходимо более быстрое убывание модуля  $e^{-pt}$ . Функции, встречающиеся при расчете переходных процессов в электрических цепях, этому условию удовлетворяют.

# Преобразование Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad - \text{ прямое преобразование Лапласа.}$$

$f(t)$  - оригинал функции,  $F(p)$  - изображение функции.

$$f(t) \equiv 0, \text{ при } t < 0.$$

$$|f(t)| < M e^{s_0 t}, \text{ при } t > 0, \text{ где } M > 0, s_0 \geq 0$$

На любом конечном отрезке  $[a, b]$  положительный полуоси  $Ot$  функция  $f(t)$  удовлетворяет условиям Дирихле, т.е.

- а) ограничена,
- б) либо непрерывна, либо имеет лишь конечное число точек разрыва I рода,
- с) имеет конечное число экстремумов.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{pt} dt \quad - \text{ обратное преобразование Лапласа.}$$

$$L[f(t)] = F(p), \quad L^{-1}[F(p)] = f(t).$$



# Операторный метод расчета переходных процессов

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

В результате прямого преобразования Лапласа производные и интегралы от оригиналов заменяются алгебраическими функциями от соответствующих изображений (дифференцирование заменяется умножением на оператор  $p$ , а интегрирование – делением на  $p$ ), что в свою очередь определяет переход от системы интегро-дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений относительно изображений искомых функций. При решении этих уравнений находятся изображения и далее путем обратного перехода – оригиналы.

Важнейшим моментом при этом является необходимость определения только независимых начальных условий  $u_C(0)$  и  $i_L(0)$ , что существенно облегчает расчет переходных процессов в цепях высокого порядка по сравнению с классическим методом на этапе определения постоянных интегрирования.

# Операторный метод расчета переходных процессов

В качестве примера в таблице приведены простейшие операторные соотношения для некоторых функций, встречающихся при анализе переходных режимов в электрических цепях.

$f(t)$	$A=\text{const}$	$t$	$e^{-\alpha t}$	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$	$\sin \omega t$	$\cos \omega t$
$F(p)$	$\frac{A}{p}$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{1}{p + \alpha}$	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$	$\frac{1}{p(p + \alpha)}$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \text{ - прямое преобразование Лапласа.}$$

$$F(p) \doteq f(t).$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{pt} dt \text{ - обратное преобразование Лапласа.}$$

# Нахождение изображений функций

**Пример 1.** Найти изображение функций  $f(t) = a^t$ ,  $t > 0$ .

Решение. Так как  $a = e^{\ln a}$ , то  $f(t) = e^{t \cdot \ln a}$ . Найдем

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-t(p - \ln a)} dt = - \left. \frac{e^{-t(p - \ln a)}}{p - \ln a} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{p - \ln a}$$

**Пример 2.** Найти изображение единичной функции Хевисайда

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t > 0 \\ 0, & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

Решение.

$$F(p) = \int_0^{\infty} \eta(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \left. \frac{e^{-pt}}{-p} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{p}.$$

# Изображения функций

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
$\delta(t) = 1(t)$	$\frac{1}{p}$	$\cos(\omega t + \psi)$	$\frac{p \cos \psi - \omega \sin \psi}{p^2 + \omega^2}$
$A \delta_1(t)$	$\frac{A}{p}$	$\sin(\omega t + \psi)$	$\frac{p \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2}$
$\delta(t) = \frac{d\delta_1}{dt}$	1	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{(n+1)}}$	$t e^{-at}$	$\frac{a}{p(p + a)}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{(p + a)}$	$\frac{df(t)}{dt}$	$pF(p) - f(0)$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{p(p + a)}$	$\int_0^t f(t) dt$	$\frac{F(p)}{p}$

# Изображения функций

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
1	$\frac{1}{p}$	$e^{\omega t}$	$\frac{1}{p - \omega}$
$t$	$\frac{1}{p^2}$	$e^{j(\omega t + \psi)}$	$\frac{e^{j\psi}}{p - j\omega}$
$t^n, n \in N$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$t e^{\omega t}$	$\frac{1}{(p - \omega)^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t + \psi)$	$\frac{p \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega t + \psi)$	$\frac{p \cos \psi - \omega \sin \psi}{p^2 + \omega^2}$

# Свойства изображений

№	Оригинал	Изображение	Комментарии
1.	$\alpha f(t) + \beta g(t), \alpha, \beta = const$	$\alpha F(p) + \beta G(p)$	Свойство линейности
2.	$f(\alpha t), \alpha = const > 0$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$	Теорема подобия
3.	$f(t - \tau), t > \tau > 0$	$e^{-p\tau} \cdot F(p)$	Теорема запаздывания
4.	$e^{-\lambda t} \cdot f(t), \lambda > 0$	$F(p + \lambda)$	Теорема смещения
5.	$f(t + a), a > 0$	$e^{ap} \left( F(p) - \int_0^a e^{-pt} \cdot f(t) dt \right)$	Теорема упреждения
6.	$\int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau$	$F(p) G(p)$	Теорема об умножении изображений

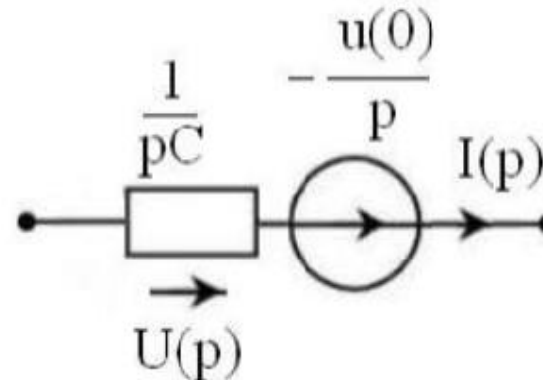
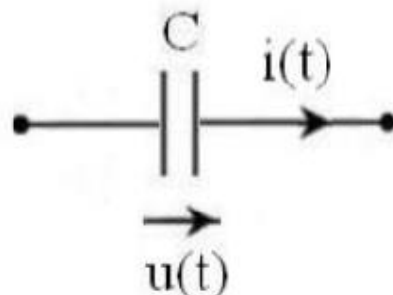
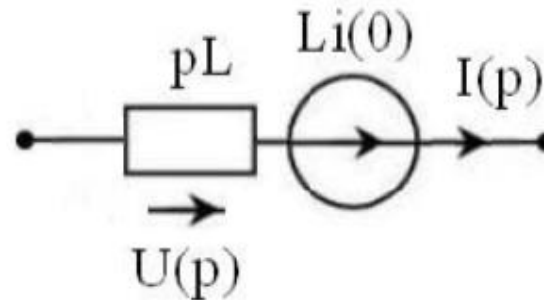
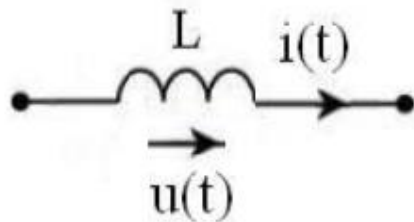
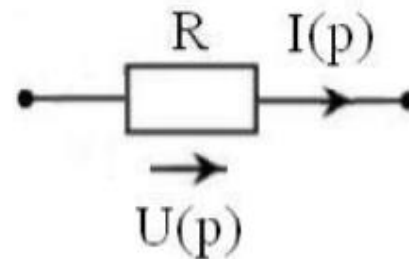
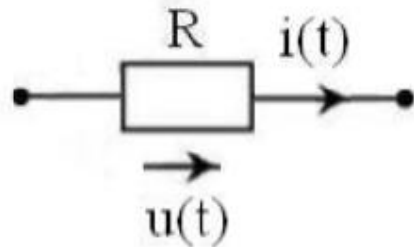


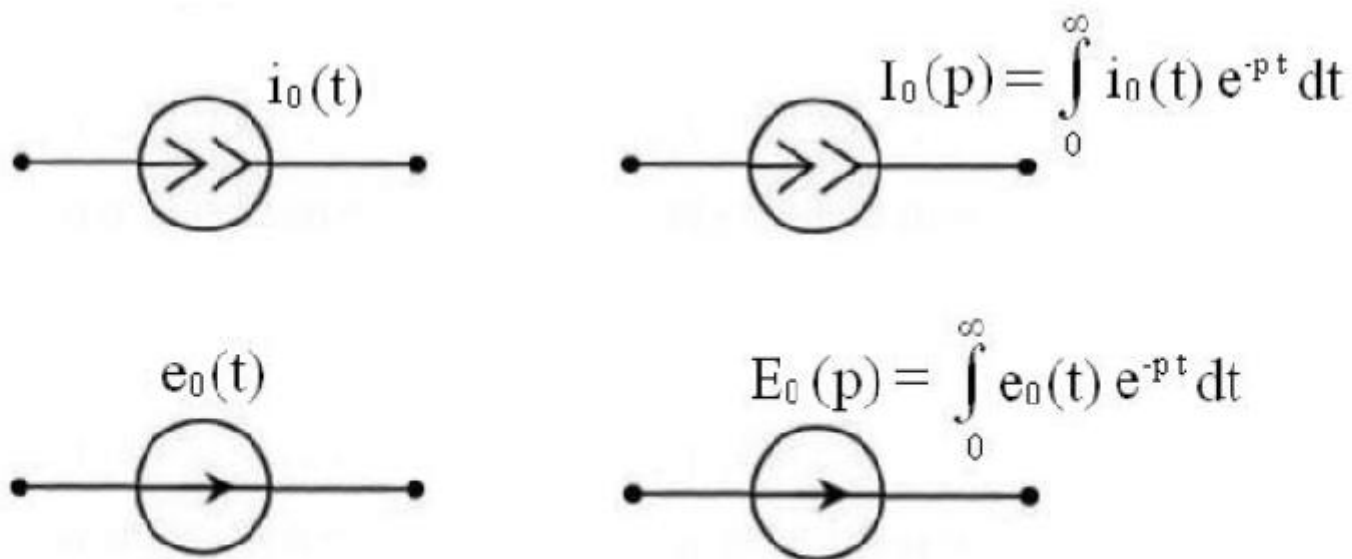
# Свойства изображений

№	Оригинал	Изображение	Комментарии
7.	$f(t) \cdot g(0) - \int_0^t f(t-\tau)g''(\tau)d\tau$	$pF(p)G(p)$	Интеграл Дюамеля
8.	$f(t)g(t)$	$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)G(p-q)dq$	Умножение оригиналов
9.	$f(t)=f(t+T)$ , $T$ - период	$\frac{1}{1-e^{-pT}} \cdot \int_0^T f(t)e^{-pt} dt$	Изображение периодического оригинала
10.	$f^{(n)}(t)$	$p^n \left( F(p) - \frac{f(0)}{p} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n} \right)$	Дифференцирован ие оригинала
11.	$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(p)$	Дифференцирован ие изображения
12.	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{p} F(p)$	Интегрирование оригинала
13.	$\frac{1}{t} f(t)$	$\int_p^\infty F(p)dp$	Интегрирование изображения

# Расчет переходных процессов операторным методом

1. Рассчитывается цепь до коммутации и определяются токи в индуктивностях и напряжения на емкостях. НУ.
2. Составляется операторная схема замещения цепи **после коммутации**.





3. Производится расчет операторной схемы замещения (допускается использование всех известных методов расчета электрических цепей).
4. Определение оригиналов функций по операторным изображениям.

$$f(t) = \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(p) e^{pt} dp \quad - \text{обратное преобразование Лапласа.}$$

**Теорема разложения:**

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}, \quad F_2(p) \neq 0, \Rightarrow p_1, p_2, \dots, p_n$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}.$$

# Расчет переходных процессов операторным методом

1. Рассчитывается цепь до коммутации и определяются токи в индуктивностях и напряжения на емкостях. НУ.
2. Составляется операторная схема замещения цепи **после коммутации**.
3. Производится расчет операторной схемы замещения (допускается использование всех известных методов расчета электрических цепей).
4. Определение оригиналов функций по операторным изображениям.


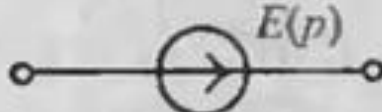
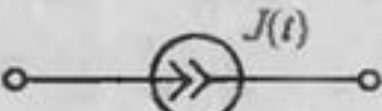
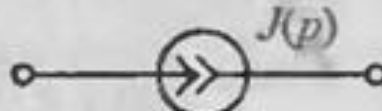
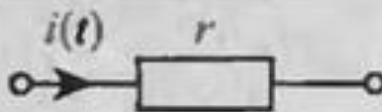
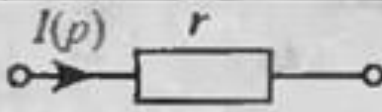
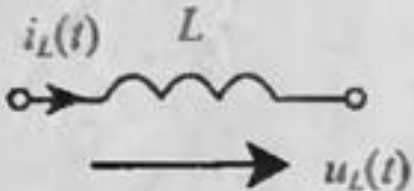
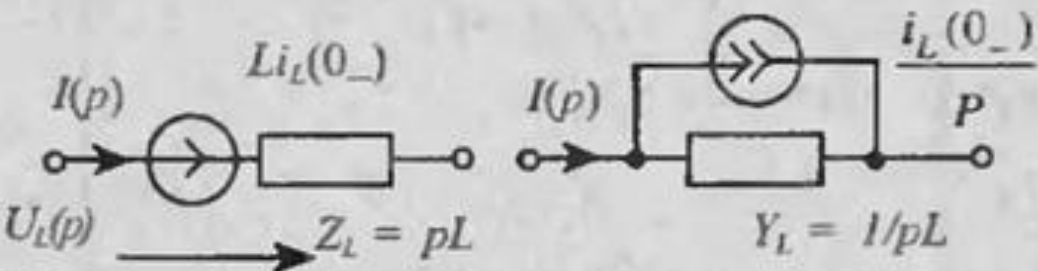
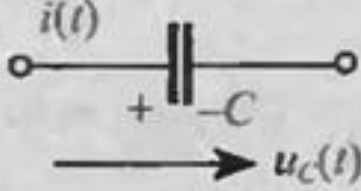
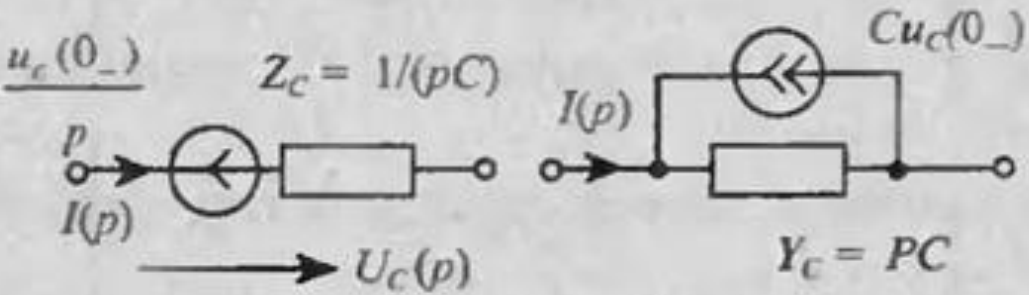
$$f(t) = \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(p) e^{pt} dp \quad - \text{обратное преобразование Лапласа.}$$

**Теорема разложения:**

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}, \quad F_2(p) = 0, \Rightarrow p_1, p_2, \dots, p_n$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}.$$

# Операторные схемы замещения элементов цепи

Элемент цепи	Оригинальная схема	Операторная схема
Источник напряжения		
Источник тока		
Сопротивление		
Индуктивность		
Емкость		



# Нахождение оригинала функции по изображению

**Пример.** Операторное изображение тока в ветви электрической цепи имеет вид

$$I(p) = \frac{0,4p + 200}{p(0,2p + 500)}. \quad \text{Найдем оригинал этого тока } i(t).$$

**Решение:**

Для данного изображения  $I(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$  имеем  $N(p) = 0,4p + 200$ ;  $M(p) = p(0,2p + 500)$ .

Находим корни уравнения  $M(p) = p(0,2p + 500) = 0$ ;  $p_1 = 0$ ;  $p_2 = -2500 \text{ с}^{-1}$ .

Находим производную  $M'(p) = 0,4p + 500$ .

Определяем необходимые значения  $N(p)$  и  $M'(p)$  при найденных корнях:

$$N(p_1) = N(0) = 0,4 \cdot 0 + 200 = 200;$$

$$N(p_2) = N(-2500) = 0,4 \cdot (-2500) + 200 = -800;$$

$$M'(p_1) = M'(0) = 0,4 \cdot 0 + 500 = 500;$$

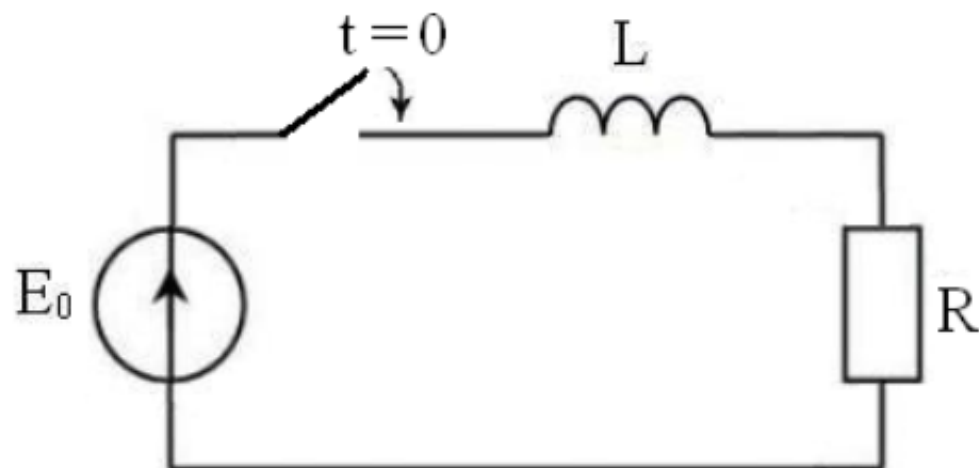
$$M'(p_2) = M'(-2500) = 0,4 \cdot (-2500) + 500 = -500.$$

Подставляя найденные значения в формулу разложения, получим функцию времени

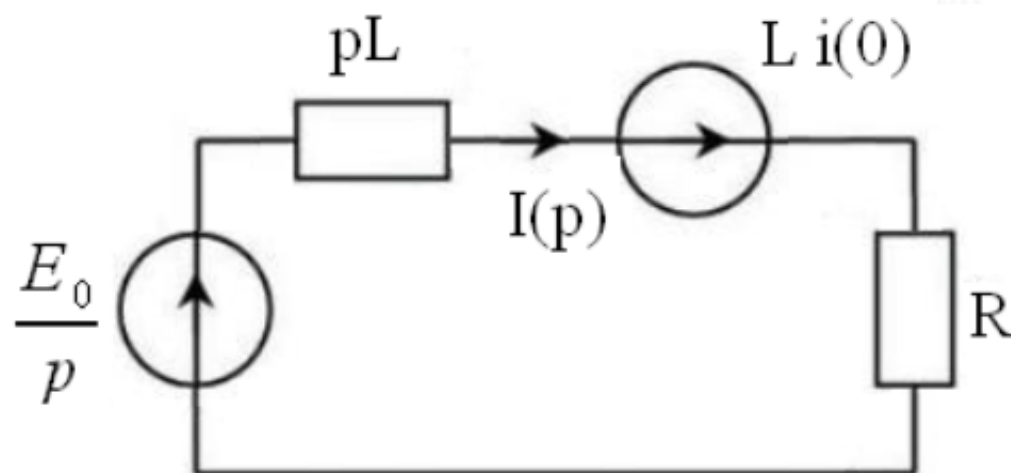
$$i(t) = \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{N(p_2)}{M'(p_2)} e^{p_2 t} = \frac{200}{500} e^0 + \frac{-800}{-500} e^{-2500t} = 0,4 + 1,6e^{-2500t} \text{ А.}$$



Найдем теперь операторным методом, как будет изменяться ток в электрической цепи, изображенной на рис. после замыкания ключа, если  $E_0 = \text{const}$ .



Поскольку цепь до коммутации была разомкнута, то  $i(0) = 0$ . Далее рисуется операторная схема замещения.



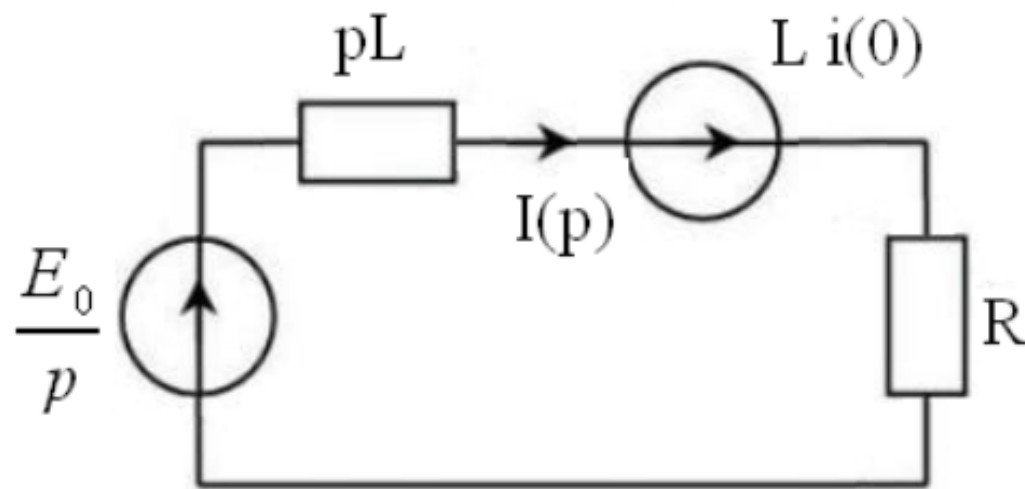


Рис. Операторная схема замещения

Так как сила тока в начальный момент времени была равна нулю, то ЭДС второго источника будет равна нулю.

По второму закону Кирхгофа составляется уравнение для изображений

$$I(p)(pL + R) = \frac{E_0}{p},$$

откуда можно выразить изображение силы тока  $I(p) = \frac{E_0}{p(pL + R)}$ .

Оригинал функции тока найдем по теореме разложения

$$i(t) = \sum_{k=1}^2 \frac{I_1(p_k)}{I_2'(p_k)} e^{p_k t}.$$

# Расчет переходных процессов операторным методом

$$I(p) = \frac{E_0}{p(pL + R)}$$

Оригинал функции тока найдем по теореме разложения

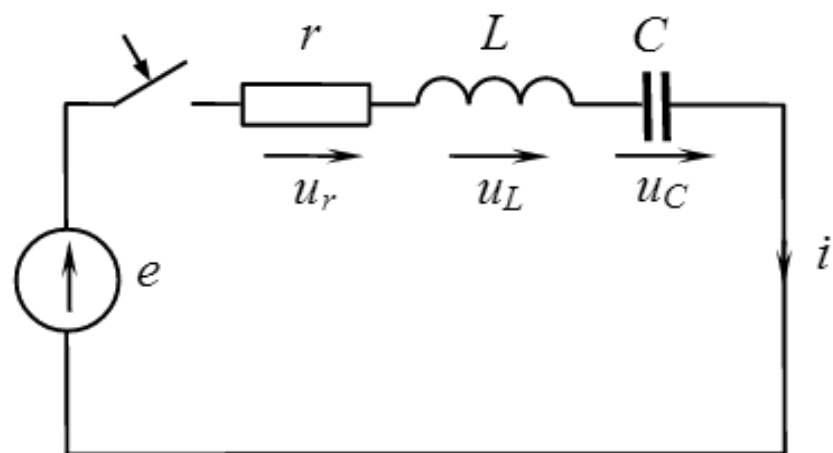
$$i(t) = \sum_{k=1}^2 \frac{I_1(p_k)}{I_2'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Из уравнения  $p(pL + R) = 0$  находим корни  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = -\frac{R}{L}$ .

Теперь подставляем их и находим мгновенное значение силы тока в цепи после замыкания ключа:

$$i(t) = \frac{E_0}{2 \cdot 0 \cdot L + R} e^{0 \cdot t} + \frac{E_0}{-2 \cdot \frac{R}{L} \cdot L + R} e^{\frac{-R}{L} t} = \frac{E_0}{R} \left( 1 - e^{\frac{-R}{L} t} \right)$$

# Расчет переходных процессов операторным методом



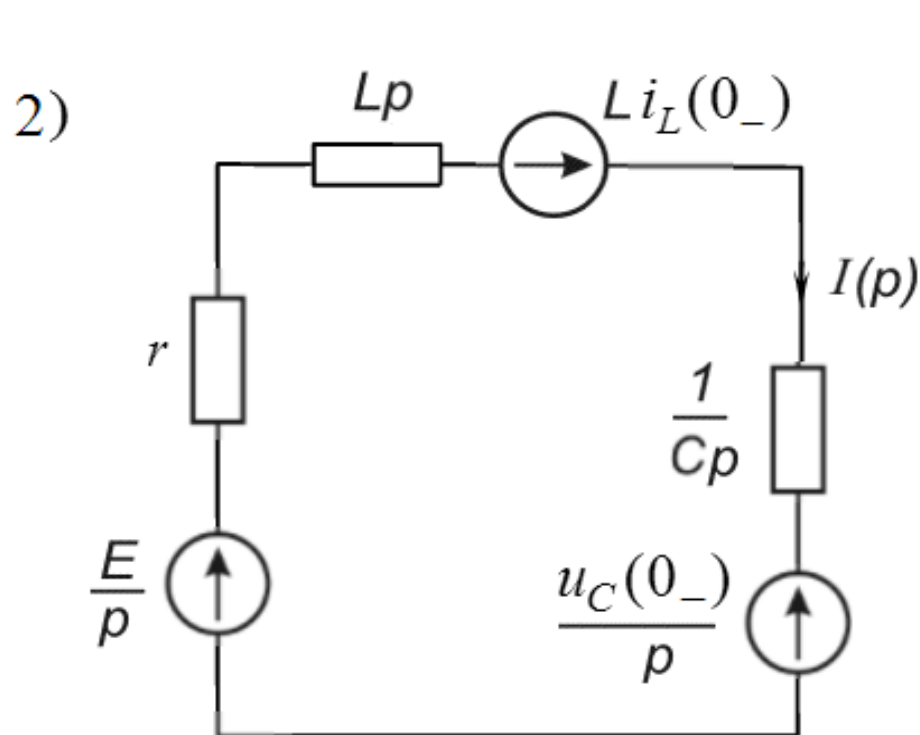
Рассмотрим два случая:

а) источник постоянной ЭДС  $e(t) = E$ ;

б) источник синусоидальной ЭДС

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi).$$

1)  $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$ ,  $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$  - начальные условия.



$$E(p) = \int_0^{\infty} E \cdot e^{-pt} dt = \frac{E}{p}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \frac{E}{p} + Li_L(0_-) - \frac{u_C(0_-)}{p} &= \\ &= I(p) \cdot \left( r + Lp + \frac{1}{Cp} \right) \end{aligned}$$

$$I(p) = \frac{EC}{rCp + CLp^2 + 1}$$

# Расчет переходных процессов операторным методом

$$I(p) = \frac{EC}{CLp^2 + rCp + 1} = \frac{I_1}{I_2(p)}$$

$$I_2(p) = 0 \Rightarrow p_{1,2} = -\frac{r}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$i(t) = \sum_{k=1}^n \frac{I_1}{I_2'(p_k)} \cdot e^{p_k t} = \sum_{k=1}^2 \frac{EC}{2CLp + rC} \cdot e^{p_k t} =$$

$$= \sum_{k=1}^2 \frac{E}{2Lp + r} \cdot e^{p_k t} = \frac{E}{2Lp_1 + r} \cdot e^{p_1 t} + \frac{E}{2Lp_2 + r} \cdot e^{p_2 t} =$$

$$= \frac{E}{\sqrt{\left(\frac{r}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}} \cdot \left( e^{p_1 t} - e^{p_2 t} \right)$$

# Расчет переходных процессов смешанным методом

Решение ищется как в классическом методе в виде суммы двух составляющих  $i_L = i_{Lсв} + i_{Lпр}$  или  $u_C = u_{Cсв} + u_{Cпр}$ . Первую свободную составляющую находят операторным методом, а принужденную составляющую — как в классическом методе.

Т. к. свободные составляющие определяются запасами внутренней энергии, значит в операторной схеме внешние источники цепи отсутствуют, поэтому не будет и внешних корней, обусловленных действием этих источников.

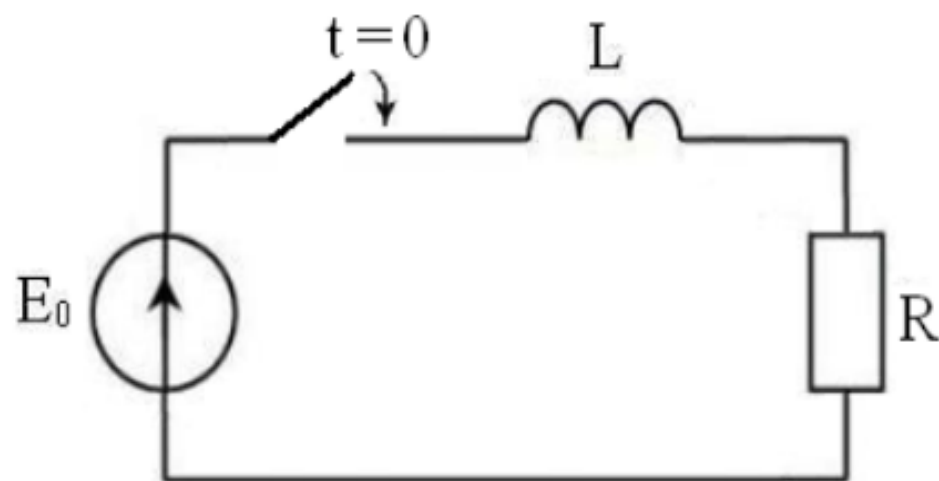
Начальные условия для свободных составляющих находятся следующим образом:

$$i_{Lсв}(0) = i_L(0) - i_{Lпр}(0), \quad u_{Cсв}(0) = u_C(0) - u_{Cпр}(0).$$

Смешанный метод позволяет избежать нахождения постоянных интегрирования и выделения принужденной составляющей.



Найдем теперь смешанным методом, как будет изменяться ток в электрической цепи, изображенной на рис. после замыкания ключа, если  $E_0 = \text{const}$ .



Поскольку цепь до коммутации была разомкнута, то  $i(0) = 0$ .

Общее решение ищется в виде двух слагаемых:  $i(t) = i_{св}(t) + i_{np}(t)$ .

Принужденную составляющую определим как в классическом методе, т. е. как установившееся значение при  $t \rightarrow \infty$ , следовательно

$$i_{np}(t) = \frac{E_0}{R}.$$

Далее записываются начальные условия для свободной составляющей:

$$i_{св}(0) = i(0) - i_{np}(0) = -\frac{E_0}{R}.$$

После этого рисуется операторная схема замещения для свободной составляющей.

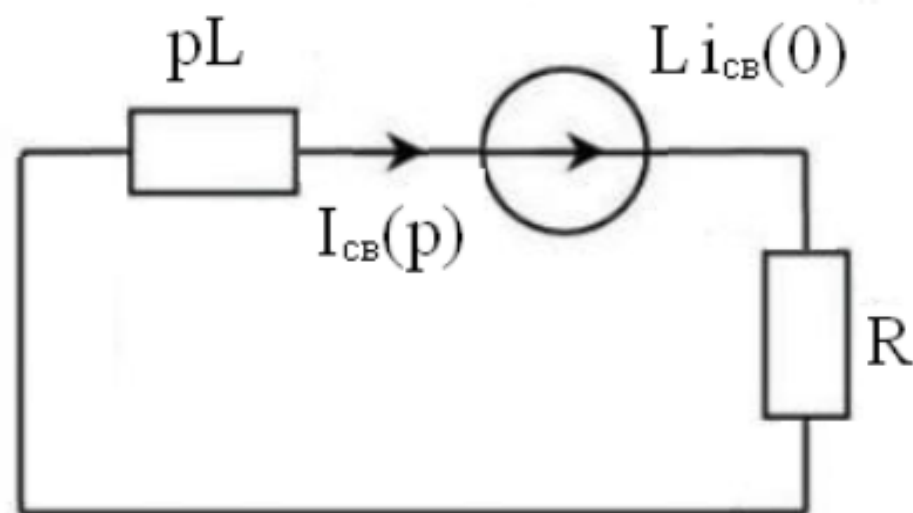


Рис. Операторная схема замещения для свободной составляющей

По второму закону Кирхгофа составляется уравнение для изображений

$$I_{св}(p)(pL + R) = -\frac{E_0 L}{R},$$

откуда можно выразить изображение свободной составляющей силы

тока 
$$I_{св}(p) = \frac{-E_0 L}{R(pL + R)}.$$

# Расчет переходных процессов смешанным методом

$$I_{ce}(p) = \frac{-E_0 L}{R(pL + R)}$$

Оригинал свободной составляющей тока найдем по теореме разложения

$$i_{ce}(t) = \sum_k \frac{I_1(p_k)}{I_2'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Из уравнения  $R(pL + R) = 0$  находим корень  $p = -\frac{R}{L}$ .

Подставляем этот корень и находим оригинал функции свободной составляющей:

$$i_{ce}(t) = -\frac{E_0}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Теперь можем найти общее решение:

$$i(t) = i_{ce}(t) + i_{np}(t) = -\frac{E_0}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{R} = \frac{E_0}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$