Бесценный И.П., Бесценная Е.В.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Учебное пособие

Омск 2024

Методические рекомендации для студентов

Выполнение каждого индивидуального задания следует начать с изучения теоретического материала.

В первом задании требуется доказать секвенцию исчисления высказываний тремя различными способами. Первый способ (сравнение таблиц истинности) описан в п. 1.1. Оформлять таблицы следует аккуратно и не торопясь во избежание нечаянных ошибок.

Наибольшую сложность представляет второй способ доказательства (построение дерева). Тут нужно и точное применение правил вывода и понимание возможных путей упрощения секвенций до аксиом. Рекомендуем внимательно изучить п. 1.2. Правильное решение может быть получено путём соединения отдельных фрагментов из примеров этого пункта. Следите за точным использованием каждого правила вывода, одинаковые буквы должны быть заменены на одинаковые формулы. Для проверки необходимо отмечать правила присвоенными им номерами и убедиться в том, что листья дерева являются аксиомами.

Третий способ (метод резолюций) описан в п. 1.3. При проведении эквивалентных преобразований основным источником ошибок является неаккуратная расстановка скобок. Если в формуле имеется несколько отрицаний, то законы де Моргана сначала применяются к самому внешнему отрицанию. Дистрибутивность используется в последнюю очередь. При построении резольвент рекомендуем использовать последовательную нумерацию дизъюнктов.

В конце каждого пункта главы 1 приведены примеры решения задания, аналогичного заданию 1. Их цель – показать ход рассуждений в процессе решения. В главе 5 показан только образец такого оформления решения, которое будет легко проверить преподавателю.

Перед выполнением второго задания изучите главу 2. Следует обратить внимание на переформулировку предложений на русском языке с целью явного определения кванторов. Переформулированные предложения записываются вслед за условием задания. При введении обозначений предикатов учитывайте синонимы. В каждов варианте должно быть три символа предикатов, один из них встречается в обоих высказываниях. Для перевода частицы (или приставки) «не» обязательно логическое отрицание.

Возможны три альтернативы. Если логический вывод нового предложения невозможен, то решение оформляется аналогично соответствующему примеру из главы 5. Если логический вывод является формулой с квантором существования, тогда следует обратиться к примеру 2.1. Если логический вывод является формулой с квантором всеобщности, то оформление аналогично примеру 2.2. В последних двух случаях вывод следует перевести на стилистически грамотный русский язык.

После решения обязательно сделайте для себя пунктуальную проверку. Решения заданий необходимо оформлять так, чтобы преподавателю было не трудно их проверить.

Глава 1

Исчисление высказываний

Высказывание – это повествовательное предложение, имеющее точный и однозначный смысл. В исчислении высказываний мы абстрагируемся от содержания высказывания и акцентируем внимание только на его истинности или ложности. Простые (атомарные) высказывания будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита $A, B, C \ldots$. Они называются также пропозициональными переменными. Значениями пропозициональных переменных могут быть только 1–«истина» или 0–«ложь».

Сложные высказывания строятся из простых при помощи логических связок:

$\neg$ – отрицание

$\wedge$ – конъюнкция

$\vee$ – дизъюнкция

$\rightarrow$ – импликация

Выражения, содержащие пропозициональные переменные, соединенные логическими связками, будем называть формулами и обозначать буквами $\Phi, \Psi, \mathrm{X} \ldots$ греческого алфавита. Строгое определение формулы следующее [2]:

1. Пропозициональная переменная есть (атомарная) формула.

2. Если Φ – формула, то $\neg\Phi$ – тоже формула.

3. Если Φ и Ψ – формулы, то $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$ и $(\Phi \rightarrow \Psi)$ – тоже формулы.

Секвенциями называются выражения вида $\Gamma \vdash \Phi$ и $\Gamma \vdash$, где Γ – последовательность нескольких формул, записанных через запятую, или одна формула, или пустая последовательность. Левая часть секвенции (Γ) называется также посылкой, правая (Φ) – заключением.

Смысл секвенции $\Gamma \vdash \Phi$ заключается в том, что из истинности всех формул из Γ (посылки) логически следует истинность формулы Φ (заключения). Это утверждение может быть истинным или ложным, поэтому можно говорить об истинности или ложности секвенции.

Секвенция $\Gamma \vdash$ понимается как утверждение о невозможности одновременной истинности всех формул из Γ, то есть их логическая противоречивость (несовместность).

1.1 Таблицы истинности

Так как число пропозициональных переменных, входящих в формулу, конечно (например, n), то существует всего 2^n различных наборов значений для этих переменных. Для каждого такого набора истинность формулы вычисляется по следующим правилам истинности логических связок:

A	$\neg A$
0	1
1	0

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Заметим, что если посылка импликации ложна, то импликация истинна.

Если для всех возможных наборов значений пропозициональных переменных формула истинна, то она называется тождественно истинной.

Для проверки истинности секвенции $\Gamma \vdash \Phi$ достаточно рассмотреть только те наборы значений пропозициональных переменных, при которых истинны все формулы из Γ, и убедится в истинности Φ для этих наборов. При этом пустая посылка считается тождественно истинной, а пустое заключение тождественно ложным.

Пример 1.1.

Проверить истинность секвенции $\neg(A \wedge B), A \vdash \neg B$ при помощи таблицы истинности.

Составляем таблицу

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	A	$\neg B$
0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0
1	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
1	1	1	0	1	0

Видим, что обе формулы посылки $\neg(A \wedge B)$, A истинны только при $A = 1$ и $B = 0$ (третья строка в таблице выделена жирным шрифтом). В этом случае заключение $\neg B$ истинно. Остальные строки в проверке не нуждаются.

1.2 Формальные доказательства

Формальная теория (исчисление) состоит из определения допустимых выражений (формул и секвенций), списка аксиом (очевидных секвенций, не нуждающихся в доказательстве) и правил вывода, по которым из одной или нескольких секвенций строятся их логические следствия. Доказательством секвенции в данной формальной теории называется последовательность секвенций, каждая из которых либо является аксиомой, либо получается из предыдущих по правилам вывода. Последняя в этой последовательности секвенция – та, которую надо доказать.

Доказуемой называется секвенция, для которой существует доказательство. Формула Φ называется доказуемой, если доказуема секвенция $\vdash \Phi$. Таким образом, доказуемость – синтаксическое понятие, то есть мы рассматриваем только внешний вид секвенций и формул, не заботясь о смысле логических связок и значениях пропозициональных переменных.

Исчисление можно задать несколькими способами, обычно выбирают такой, чтобы количество аксиом и правил вывода было минимальным, но тогда доказательства получаются достаточно длинными и сложными. Главное требование к исчислению – полнота и непротиворечивость, что равносильно совпадению множества доказуемых и множества тождественно истинных формул.

Рассмотрим следующий вариант исчисления высказываний [2]:

Аксиомами являются секвенции вида $\Phi \vdash \Phi$, где Φ – любая формула. Например, $A \wedge B \vdash A \wedge B$ – аксиома.

Правила вывода следующие:

1. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\ \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}$.
2. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$.
3. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$.
4. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$.
5. $\dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}$.
6. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash X;\ \Gamma, \Psi \vdash X;\ \Gamma \vdash \Phi \vee \Psi}{\Gamma \vdash X}$.
7. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash \Phi \to \Psi}$.
8. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\ \Gamma \vdash \Phi \to \Psi}{\Gamma \vdash \Psi}$.
9. $\dfrac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}$.
10. $\dfrac{\Gamma \vdash \Phi;\ \Gamma \vdash \neg\Phi}{\Gamma \vdash}$.
11. $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash X}{\Gamma_1, \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash X}$.
12. $\dfrac{\Gamma \vdash X}{\Gamma, \Psi \vdash X}$.

Буквами Φ, Ψ, X обозначаются формулы, а буквами $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ – последовательности формул, возможно пустые. Коротко прокомментируем применение правил вывода при построении доказательств. Доказательства удобно записывать в виде дерева, в котором внизу (в корне дерева) находится секвенция, которую надо доказать, а вверху (листья дерева) находятся аксиомы.

Правила 11 и 12 называются структурными и применяются для добавления формул в посылку, при этом их порядок не важен. Правило 12 ещё называют «усиление предусловий». Например:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{B \ \vdash \ B}{B, A \ \vdash \ B}(12)}{A, B \ \vdash \ B}(11)}{A, B, C \ \vdash \ B}(12).$$

Первая строка этого дерева – аксиома, каждая следующая получается из предыдущей по правилу вывода, номер которого указан в скобках сбоку от черты. Этот пример показывает как из аксиом можно доказывать секвенции, в левой части которых есть формула, совпадающая с формулой правой части секвенции. В дальнейшем изложении такого рода части дерева доказательства будем опускать.

Правила 1–3 иллюстрируют логические свойства конъюнкции. Чтобы доказать секвенцию, заключение которой является конъюнкцией двух формул, надо сначала доказать две секвенции, у которых такая же посылка, а заключение – у одной первая формула из конъюнкции, у другой вторая формула; затем применить правило 1.

Правила 2 и 3 утверждают, что каждая компонента конъюнкции является её логическим следствием. Иначе говоря, конъюнкция логически сильнее своих компонент. Например, эти правила используются для доказательства коммутативности конъюнкции (что изначально не постулировалось):

$$\cfrac{\cfrac{A \wedge B \ \vdash \ A \wedge B}{A \wedge B \ \vdash \ B}(3) \quad \cfrac{A \wedge B \ \vdash \ A \wedge B}{A \wedge B \ \vdash \ A}(2)}{A \wedge B \ \vdash \ B \wedge A}(1).$$

Отметим также фрагмент дерева

$$\frac{A, B \ \vdash \ A; \quad A, B \ \vdash \ B}{A, B \ \vdash \ A \wedge B}(1)\ ,$$

который показывает, что последовательность формул в левой части секвенции равносильна их конъюнкции.

Правила 7 и 8 позволяют добавлять и исключать связку импликации. Типичный пример использования правила 8:

$$\cfrac{\cfrac{\Phi \ \vdash \ \Phi}{\Phi, \Phi \to \Psi \ \vdash \ \Phi}(12) \quad \cfrac{\Phi \to \Psi \ \vdash \ \Phi \to \Psi}{\Phi, \Phi \to \Psi \ \vdash \ \Phi \to \Psi}(12)}{\Phi, \Phi \to \Psi \ \vdash \ \Psi}(8)\ .$$

Если доказаны секвенции $\Gamma_1 \ \vdash \ \Phi$ и $\Gamma_2, \Phi \ \vdash \ \Psi$, то добавляя следующий фрагмент дерева:

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma_1 \ \vdash \ \Phi}{\Gamma_1, \Gamma_2 \ \vdash \ \Phi}(12) \quad \cfrac{\cfrac{\Gamma_2, \Phi \ \vdash \ \Psi}{\Gamma_2 \ \vdash \ \Phi \to \Psi}(7)}{\Gamma_1, \Gamma_2 \ \vdash \ \Phi \to \Psi}(12)}{\Gamma_1, \Gamma_2 \ \vdash \ \Psi}(8)\ ,$$

получим доказательство секвенции $\Gamma_1, \Gamma_2 \ \vdash \ \Psi$. Таким образом, можно добавить к исчислению высказываний правило вывода (назовем его правилом транзитивности)

$$\text{T.} \quad \frac{\Gamma_1 \ \vdash \ \Phi; \ \Gamma_2, \Phi \ \vdash \ \Psi}{\Gamma_1, \Gamma_2 \ \vdash \ \Psi}\ ,$$

которое по сути является средством сокращения записи фрагмента дерева доказательства и не увеличивает множества доказуемых секвенций. Такие правила вывода называются допустимыми.

Правило транзитивности часто используется при доказательстве секвенций с конъюнкцией в посылке. Например, если уже доказана секвенция $\Phi \vdash \Psi$, то можно доказать и $\Phi \wedge \mathrm{X} \vdash \Psi \wedge \mathrm{X}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi \wedge \mathrm{X} \vdash \Phi \wedge \mathrm{X}}{\Phi \wedge \mathrm{X} \vdash \Phi}(2) \quad \boldsymbol{\Phi \vdash \Psi}}{\Phi \wedge \mathrm{X} \vdash \Psi}(T) \quad \dfrac{\Phi \wedge \mathrm{X} \vdash \Phi \wedge \mathrm{X}}{\Phi \wedge \mathrm{X} \vdash \mathrm{X}}(3)}{\Phi \wedge \mathrm{X} \vdash \Psi \wedge \mathrm{X}}(1)\ .$$

Доказуемость секвенции вида $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n \vdash \Psi$ равносильна доказуемости формулы $(\Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \ldots \wedge \Phi_n) \to \Psi$. Рассмотрим случай двух формул в левой части:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi_1 \wedge \Phi_2 \vdash \Phi_1 \wedge \Phi_2}{\Phi_1 \wedge \Phi_2 \vdash \Phi_2}(3) \quad \dfrac{\dfrac{\Phi_1 \wedge \Phi_2 \vdash \Phi_1 \wedge \Phi_2}{\Phi_1 \wedge \Phi_2 \vdash \Phi_1}(2) \quad \dfrac{\boldsymbol{\Phi_1, \Phi_2 \vdash \Psi}}{\Phi_1 \vdash \Phi_2 \to \Psi}(7)}{\Phi_1 \wedge \Phi_2 \vdash \Phi_2 \to \Psi}(T)}{\dfrac{\Phi_1 \wedge \Phi_2 \vdash \Psi}{\vdash (\Phi_1 \wedge \Phi_2) \to \Psi}(7)}(8).$$

С другой стороны

$$\dfrac{\Phi_1, \Phi_2 \vdash \Phi_1 \wedge \Phi_2; \quad \dfrac{\Phi_1 \wedge \Phi_2 \vdash \Phi_1 \wedge \Phi_2;\ \vdash (\boldsymbol{\Phi_1 \wedge \Phi_2}) \to \boldsymbol{\Psi}}{\Phi_1 \wedge \Phi_2 \vdash \Psi}(8)}{\Phi_1, \Phi_2 \vdash \Psi}(T).$$

Правила 9 и 10 обязательно применяются для доказательства формул, включающих отрицание. Правило 10 называется «выведение противоречия». Правило 9 формализует метод «рассуждения от противного». Любая формула и её отрицание несовместны:

$$\dfrac{\Phi, \neg\Phi \vdash \Phi; \quad \Phi, \neg\Phi \vdash \neg\Phi}{\Phi, \neg\Phi \vdash}(10)\ .$$

Подставляя вместо Φ в частности формулы $\neg A$ и $\neg\neg A$, получаем доказательство секвенций $\neg A, \neg\neg A \vdash$ и $\neg\neg A, \neg\neg\neg A \vdash$. Далее

$$\dfrac{\neg\neg A, \neg A \vdash}{\neg\neg A \vdash A}(9)$$

и

$$\dfrac{\neg\neg\neg A, \neg\neg A \vdash}{\neg\neg\neg A \vdash \neg A}(9)\ .$$

Теперь

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg\neg A \vdash \neg A}{A, \neg\neg\neg A \vdash \neg A}(12) \quad \dfrac{A \vdash A}{A, \neg\neg\neg A \vdash A}(12)}{A, \neg\neg\neg A \vdash}(10)}{A \vdash \neg\neg A}(9)\ .$$

Формулы Φ и Ψ называются эквивалентными (обозначается $\Phi \equiv \Psi$), если доказуемы обе секвенции $\Phi \vdash \Psi$ и $\Psi \vdash \Phi$. Фактически выше было приведено доказательство эквивалентности $\Phi \equiv \neg\neg\Phi$. Если доказуема секвенция $\Gamma \vdash \Phi$, и имеет место $\Phi \equiv \Psi$, то, применяя правило транзитивности, можно доказать секвенцию $\Gamma \vdash \Psi$.

Правила 9 и 10 используются также для доказательства допустимости следующих правил вывода:

6a. $\dfrac{\Gamma, \Phi \ \vdash \ ; \ \Gamma, \Psi \ \vdash \ ; \ \Gamma \ \vdash \ \Phi \vee \Psi}{\Gamma \ \vdash}$.

11a. $\dfrac{\Gamma_1, \Phi, \Psi, \Gamma_2 \vdash}{\Gamma_1, \Psi, \Phi, \Gamma_2 \vdash}$.

12a. $\dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma, \Psi \vdash}$.

12б. $\dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma \ \vdash \ \Psi}$.

9a. $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash}{\Gamma \ \vdash \ \neg\Phi}$.

9б. $\dfrac{\Gamma \ \vdash \ \Phi}{\Gamma, \neg\Phi \vdash}$.

Правила 6а, 11а, 12а являются аналогами правил 6, 11, 12 для секвенций с пустой правой частью. Проверка допустимости этих правил основана на том, что секвенцию $\Gamma \vdash$ можно получить только по правилу 10. Поэтому для некоторой формулы X должны быть доказуемы секвенции $\Gamma \vdash X$, $\Gamma \vdash \neg X$. Тогда из этих секвенций по правилу 1 выводится $\Gamma \vdash X \wedge \neg X$. К ней формально уже можно применять правила 6, 11 или 12. После чего используется правило транзитивности и доказуемость секвенции $X \wedge \neg X \vdash$. Точное построение доказательств допустимости этих правил предоставляется в качестве упражнения.

Правило 12б известно также как утверждение «из лжи можно вывести всё, что угодно». Оно является комбинацией правил 12а и 9:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma, \neg\Psi \vdash}(12a)}{\Gamma \ \vdash \ \Psi}(9).$$

Обоснование допустимости правила 9а основано на рассуждениях о правиле 10 и эквивалентности формулы её двойному отрицанию, приведённых ранее:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg\Phi \ \vdash \ \Phi; \ \Gamma, \Phi \ \vdash \ X}{\neg\neg\Phi, \Gamma \ \vdash \ X}(T) \quad \dfrac{\neg\neg\Phi \ \vdash \ \Phi; \ \Gamma, \Phi \ \vdash \ \neg X}{\neg\neg\Phi, \Gamma \ \vdash \ \neg X}(T)}{\neg\neg\Phi, \Gamma \vdash}(10)}{\Gamma \ \vdash \ \neg\Phi}(9) \ .$$

Докажем теперь допустимость правила 9б:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \ \vdash \ \Phi}{\Gamma, \neg\Phi \ \vdash \ \Phi}(12) \quad \dfrac{\neg\Phi \ \vdash \ \neg\Phi}{\Gamma, \neg\Phi \ \vdash \ \neg\Phi}(12)}{\Gamma, \neg\Phi \ \vdash}(10) \ .$$

Правила 9а и 9б в определенном смысле обратны правилу 9. Все три они позволяют «переносить» формулу из одной части секвенции в другую с «противоположным знаком». Например, иногда полезным бывает следующий фрагмент дерева:

$$\dfrac{\dfrac{\Phi \ \vdash \ \Psi}{\neg\Psi, \Phi \ \vdash}(9b)}{\neg\Psi \ \vdash \ \neg\Phi}(9a) \ ,$$

известный как правило обращения теорем.

Правила 4–6 иллюстрируют логические свойства дизъюнкции. Дизъюнкция является логическим следствием каждой из своих компонент. Иначе говоря, дизъюнкция логически слабее своих компонент:

$$\frac{\Phi \ \vdash \ \Phi}{\Phi \ \vdash \ \Phi \vee \Psi}(4), \qquad \frac{\Psi \ \vdash \ \Psi}{\Psi \ \vdash \ \Phi \vee \Psi}(5).$$

Наибольшие технические трудности связаны с применением правила 6, формализуещего рассуждение «методом разбора вариантов». Это правило – единственное из 12, в котором следствие строится из трёх секвенций. Без применения этого правила не обойтись при доказательстве секвенций, содержащих дизъюнкцию. Более простой случай, когда дизъюнкция встречается в посылке. Тогда непосредственно разбираются два варианта.

Рекомендация 1. Для доказательства секвенции, у которой в левой части есть дизъюнкция двух формул, надо доказать две секвенции с тем же заключением, но в посылке одной секвенции вместо дизъюнкции стоит первая формула дизъюнкции, в посылке другой – вторая формула. Тогда правило 6 применяется по следующей схеме:

$$\frac{\dfrac{\Gamma, \Phi \ \vdash \ \mathrm{X}}{\Gamma, \Phi \vee \Psi, \Phi \vdash \mathrm{X}}(12) \quad \dfrac{\Gamma, \Psi \ \vdash \ \mathrm{X}}{\Gamma, \Phi \vee \Psi, \Psi \vdash \mathrm{X}}(12) \quad \dfrac{\Phi \vee \Psi \ \vdash \ \Phi \vee \Psi}{\Gamma, \Phi \vee \Psi \vdash \Phi \vee \Psi}(12)}{\Gamma, \Phi \vee \Psi \ \vdash \ \mathrm{X}}(6)\ .$$

В частности, таким методом доказывается коммутативность дизъюнкции:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{B \ \vdash \ B}{B \ \vdash \ A \vee B}(5)}{B \vee A, B \vdash A \vee B}(12) \quad \dfrac{\dfrac{A \ \vdash \ A}{A \ \vdash \ A \vee B}(4)}{B \vee A, A \vdash A \vee B}(12) \quad B \vee A \vdash B \vee A}{B \vee A \ \vdash \ A \vee B}(6)\ .$$

Другой пример применения рекомендации 1: если уже доказана секвенция $\Phi \ \vdash \ \Psi$, то можно доказать и $\Phi \vee \mathrm{X} \ \vdash \ \Psi \vee \mathrm{X}$.

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\boldsymbol{\Phi \ \vdash \ \Psi}}{\Phi \ \vdash \ \Psi \vee \mathrm{X}}(4)}{\Phi \vee \mathrm{X},\ \Phi \vdash \Psi \vee \mathrm{X}}(12) \quad \dfrac{\dfrac{\mathrm{X} \ \vdash \ \mathrm{X}}{\mathrm{X} \ \vdash \ \Psi \vee \mathrm{X}}(5)}{\Phi \vee \mathrm{X},\ \mathrm{X} \vdash \Psi \vee \mathrm{X}}(12) \quad \Phi \vee \mathrm{X} \vdash \Phi \vee \mathrm{X}}{\Phi \vee \mathrm{X} \ \vdash \ \Psi \vee \mathrm{X}}(6)\ .$$

Согласно теореме о характеризации доказуемых формул исчисления высказываний, основной доказуемой формулой является $A \vee \neg A$, где A – любая пропозициональная переменная. Более общее утверждение известно как закон исключённого третьего: для любой формулы X доказуема секвенция $\vdash \mathrm{X} \vee \neg \mathrm{X}$. Приведем её сокращенное доказательство:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg \mathrm{X} \ \vdash \ \neg \mathrm{X}}{\neg \mathrm{X} \ \vdash \ \mathrm{X} \vee \neg \mathrm{X}}(5)}{\neg(\mathrm{X} \vee \neg \mathrm{X}) \ \vdash \ \mathrm{X}}(9, 9\mathrm{b}) \quad \dfrac{\dfrac{\mathrm{X} \ \vdash \ \mathrm{X}}{\mathrm{X} \ \vdash \ \mathrm{X} \vee \neg \mathrm{X}}(4)}{\neg(\mathrm{X} \vee \neg \mathrm{X}) \ \vdash \ \neg \mathrm{X}}(9\mathrm{a}, 9\mathrm{b})}{\neg(\mathrm{X} \vee \neg \mathrm{X}) \ \vdash}(10)}{\vdash \ \mathrm{X} \vee \neg \mathrm{X}}(9)\ .$$

Закон исключнного третьего используется для доказательства секвенций с дизъюнкцией в заключении. Если каждая компонента дизъюнкции не выводится непосредственно из посылки, то необходимо разобрать два взаимоисключеющих варианта.

Рекомендация 2. Для доказательства секвенций вида $\Gamma \vdash \Phi \vee \Psi$ нужно подобрать такую формулу X, чтобы были доказуемы секвенции $\Gamma, \mathrm{X} \vdash \Phi$ и $\Gamma, \neg \mathrm{X} \vdash \Psi$. Затем доказательство строится по следующей схеме:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \mathrm{X} \ \vdash \ \Phi}{\Gamma, \mathrm{X} \ \vdash \ \Phi \vee \Psi}(4) \quad \dfrac{\Gamma, \neg\mathrm{X} \ \vdash \ \Psi}{\Gamma, \neg\mathrm{X} \ \vdash \ \Phi \vee \Psi}(5) \quad \dfrac{\vdash \ \mathrm{X} \vee \neg\mathrm{X}}{\Gamma \ \vdash \ \mathrm{X} \vee \neg\mathrm{X}}(12)}{\Gamma \ \vdash \ \Phi \vee \Psi}(6)\ .$$

Сложность состоит в выборе нужной формулы X. При этом требуется определенный навык и логическая интуиция. Процедура выбора учитывает список известных доказуемых секвенций, начиная с аксиом (когда слева и справа одинаковая формула). Например, при доказательстве секвенции $\Phi \to \Psi \ \vdash \ \neg\Phi \vee \Psi$ вспоминаем типичный пример применения правила 8 ($\Phi, \Phi \to \Psi \ \vdash \ \Psi$); выбираем $\mathrm{X} = \Phi$; проверяем, что отрицание X совпадает с другим компонентом дизъюнкции в заключении. После этого строим дерево доказательства.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi \vdash \Phi;\ \Phi \to \Psi \vdash \Phi \to \Psi}{\Phi \to \Psi, \Phi \vdash \Psi}(8)}{\Phi \to \Psi, \Phi \vdash \neg\Phi \vee \Psi}(5) \quad \dfrac{\Phi \to \Psi, \neg\Phi \vdash \neg\Phi}{\Phi \to \Psi, \neg\Phi \vdash \neg\Phi \vee \Psi}(4) \quad \vdash \Phi \vee \neg\Phi}{\Phi \to \Psi \ \vdash \ \neg\Phi \vee \Psi}(6).$$

Вместе с

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi,\ \neg\Phi \ \vdash}{\neg\Phi \vee \Psi, \Phi, \neg\Phi \vdash \Psi}(12b) \dfrac{\Psi \ \vdash \ \Psi}{\neg\Phi \vee \Psi, \Phi, \Psi \vdash \Psi}(12) \ \neg\Phi \vee \Psi \vdash \neg\Phi \vee \Psi}{\neg\Phi \vee \Psi, \Phi \ \vdash \ \Psi}(6)}{\neg\Phi \vee \Psi \ \vdash \ \Phi \to \Psi}(7)$$

это даёт доказательство эквивалентности $\Phi \to \Psi \equiv \neg\Phi \vee \Psi$.

При выборе формулы X из рекомендации 2 иногда может пригодиться доказуемость секвенций вида $\Phi \vee \Psi,\ \neg\Psi \ \vdash \ \Phi$.

$$\dfrac{\dfrac{\Phi \ \vdash \ \Phi}{\Phi \vee \Psi, \neg\Psi, \Phi \vdash \Phi}(12) \dfrac{\neg\Psi, \Psi \ \vdash}{\Phi \vee \Psi, \neg\Psi, \Psi \vdash \Phi}(12b) \dfrac{\Phi \vee \Psi \vdash \Phi \vee \Psi}{\Phi \vee \Psi, \neg\Psi \vdash \Phi \vee \Psi}(12)}{\Phi \vee \Psi,\ \neg\Psi \ \vdash \ \Phi}(6).$$

В следующем параграфе этот приём «вычёркивания» формулы и её отрицания будет обобщен на дизъюнкции с произвольным числом компонент.

Полезным упражнением является доказательство законов де Моргана: $\neg(\Phi \vee \Psi) \equiv (\neg\Phi \wedge \neg\Psi)$ и $\neg(\Phi \wedge \Psi) \equiv (\neg\Phi \vee \neg\Psi)$. В этих четырёх секвенциях встречаются все разобранные выше варианты (конъюнкция в посылке, конъюнкция в заключении, дизъюнкция в посылке, дизъюнкция в заключении).

В заключение этого параграфа вернёмся к секвенции из примера 1.1 и докажем её другим способом.

Пример 1.2.

Построить доказательство секвенции $\neg(A \wedge B), A \ \vdash \ \neg B$ в виде дерева.

Формулы, содержащие отрицание, требуют применения правила 9. Построение дерева начинаем снизу вверх.

$$\dfrac{\dfrac{A, B \ \vdash \ A \wedge B}{\neg(A \wedge B), A, B \ \vdash}(9b)}{\neg(A \wedge B), A \ \vdash \ \neg B}(9a).$$

Вспоминаем, что секвенция $A, B \ \vdash \ A \wedge B$ была доказана на странице 5, и достраиваем дерево вверх до получения аксиом (выделены жирным шрифтом). Применение правил 11 и 12 можно опустить.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathbf{A}, B \ \vdash \ \mathbf{A}; \quad A, \mathbf{B} \ \vdash \ \mathbf{B}}{A, B \ \vdash \ A \wedge B}(1)}{\neg(A \wedge B), A, B \ \vdash}(9b)}{\neg(A \wedge B), A \ \vdash \ \neg B}(9a).$$

1.3 Метод резолюций

Для краткости пропозициональные переменные и их отрицания назовем литерами (положительными и отрицательными соответственно). Формула называется находящейся в конъюнктивной нормальной форме (КНФ), если она имеет вид $D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_k$, где каждая D_i является дизъюнктом, т. е. дизюнкцией литер. Используя эквивалентности, приведенные в предыдущем параграфе, а также $\Phi \wedge (\Psi \vee \mathrm{X}) \equiv (\Phi \wedge \Psi) \vee (\Phi \wedge \mathrm{X})$ и $\Phi \vee (\Psi \wedge \mathrm{X}) \equiv (\Phi \vee \Psi) \wedge (\Phi \vee \mathrm{X})$, можно любую формулу преобразовать к эквивалентной ей КНФ.

Если формулы $D_1 = \Phi_1 \vee A$ и $D_2 = \Phi_2 \vee \neg A$ являются дизъюнктами, то $\Phi_1 \vee \Phi_2$ называется их резольвентой и обозначается $\mathrm{res}(D_1, D_2) = \mathrm{res}(\Phi_1 \vee A, \Phi_2 \vee \neg A) = \Phi_1 \vee \Phi_2$. Резольвента также является дизъюнктом, но уже не содержит литеру A. Резольвента одиночных контрарных литер $\mathrm{res}(A, \neg A) = 0$ называется пустой. Если две формулы не имеют одинаковых, но противоположных по «знаку» (контрарных) литер, то их резольвента не существует. Если резольвента двух дизъюнктов существует, то она является логическим следствием их конъюнкции.

Докажем секвенцию $D_1, D_2 \ \vdash \ \mathrm{res}(D_1, D_2)$, где $D_1 = \Phi_1 \vee A$ и $D_2 = \Phi_2 \vee \neg A$. Из доказуемости $\neg A, A \vdash$ по правилу 12б получаем $\Phi_1 \vee A, \neg A, A \ \vdash \ \Phi_1$. Далее

$$\cfrac{\cfrac{\Phi_1 \vee A, \neg A, \Phi_1 \vdash \Phi_1; \ \Phi_1 \vee A, \neg A, A \vdash \Phi_1; \ \Phi_1 \vee A, \neg A \vdash \Phi_1 \vee A}{\Phi_1 \vee A, \neg A \ \vdash \ \Phi_1}(6)}{\Phi_1 \vee A, \neg A \ \vdash \ \Phi_1 \vee \Phi_2}(4)\ .$$

Аналогично доказывается секвенция $\Phi_2 \vee \neg A, A \ \vdash \ \Phi_1 \vee \Phi_2$. Теперь соединяем вместе:

$$\cfrac{\Phi_1 \vee A, \neg A \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2; \ \Phi_2 \vee \neg A, A \vdash \Phi_1 \vee \Phi_2; \ \ \vdash A \vee \neg A}{\Phi_1 \vee A, \Phi_2 \vee \neg A \ \vdash \ \Phi_1 \vee \Phi_2}(6)\ .$$

Итак, секвенция $\Phi_1 \vee A, \Phi_2 \vee \neg A \ \vdash \ \Phi_1 \vee \Phi_2$, обозначенная ранее как $D_1, D_2 \ \vdash \ \mathrm{res}(D_1, D_2)$, доказана.

Доказательство по методу резолюций секвенции $\Gamma \ \vdash \ \Phi$ проводится в следующем порядке. Сначала её заменяют на $\Gamma, \neg\Phi \vdash$. В предыдущем параграфе было показано, что перечисление формул через запятую в посылке секвенции равносильно их конъюнкции. Конъюнкцию всех формул посылки приводят к КНФ и составляют список её дизъюнктов (начальное множество $S = \{D_1, D_2, \ldots, D_k\}$). Последовательность дизъюнктов, каждый из которых либо входит в S, либо является резольвентой некоторых предыдущих, называется доказательством по методу резолюций. Если удалось вывести пустой дизъюнкт 0, то секвенция доказана.

Таким образом, доказательство по методу резолюций является значительным упрощением полного формального доказательства в исчислени высказываний (но может быть до него восстановлено). Если $D_n = \mathrm{res}(D_i, D_j)$ и $n > i$, $n > j$, то доказуема секвенция $D_i, D_j \ \vdash \ D_n$. Многократно применяя правило транзитивности, получаем доказательства секвенций вида $D_1 \wedge D_2 \wedge \cdots \wedge D_k \vdash \ D_n$ для всех дизъюнктов D_n из доказательства по методу резолюций. Если последний дизъюнкт пустой, то доказана секвенция $D_1 \wedge D_2 \wedge \cdots \wedge D_k \vdash$, которая эквивалентна $\Gamma, \neg\Phi \vdash$ (все эквивалентности тоже имеют свои доказательства в виде дерева). Наконец, последний шаг:

$$\frac{\Gamma, \neg\Phi \vdash}{\Gamma \vdash \Phi}(9).$$

Процедуру перебора всех возможных резольвент можно поручить и компьютеру, что делает метод резолюций основным при создании языков логического программирования для разработки программ автоматического доказательства теорем.

Применим теперь этот способ к той же секвенции, что и в примерах 1.1 и 1.2.

Пример 1.3.

Доказать секвенцию $\neg(A \wedge B), A \vdash \neg B$ методом резолюций.

Сначала переносим заключение в левую часть с противоположным «знаком». Данная секвенция равносильна $\neg(A \wedge B), A, \neg\neg B \vdash$. Конъюнкцию её посылок приводим к КНФ, используя эквивалентности:

$$(\neg(A \wedge B)) \wedge A \wedge (\neg\neg B) \equiv (\neg A \vee \neg B) \wedge A \wedge B \ .$$

Начальное множество дизъюнктов

$$S = \{D_1 = \neg A \vee \neg B, D_2 = A, D_3 = B\}.$$

Доказательство состоит из S и двух резольвент:

$$D_4 = \mathrm{res}(D_2, D_1) = \mathrm{res}(A, \neg A \vee \neg B) = \neg B \ ;$$

$$D_5 = \mathrm{res}(D_3, D_4) = \mathrm{res}(B, \neg B) = 0 \ .$$

Так как получена пустая резольвента, то секвенция доказана.

Глава 2

Исчисление предикатов

Исчисление предикатов, по сравнению с исчислением высказываний, является более сложной моделью реального мира. Оно учитывает свойства и взаимосвязи объектов из некоторого множества, которое будем называть «универсум».

Предметные переменные $x_1, x_2, \ldots, x_m$ служат для обозначения объектов. Их значения – конкретные объекты $a_1, a_2, \ldots, a_m \in U$.

Можно считать, что на рассматриваемом множестве U дополнительно заданы операции $f_1, f_2, \ldots, f_k$, то есть отображения

$$f_i \ : \ U^{n_i} \ \longrightarrow \ U,$$

которые сопоставляют каждому набору (кортежу) $a_1, a_2, \ldots, a_{n_i} \in U$ определённое значение $f_i(a_1, a_2, \ldots, a_{n_i}) \in U$.

Термы определяются следующим образом:

1. Предметная переменная есть терм.

2. Если $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – термы, а f – n-местная операция, то $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ – тоже терм.

Предикат – это утверждение об одном или нескольких объектах, истинность или ложность которого зависит от значений предметных переменных. Точнее, n-местный предикат – это отображение

$$P \ : \ U^n \ \longrightarrow \ \{0, 1\},$$

где 1–«истина», а 0–«ложь».

Можно отождествить предикат с подмножеством декартовой степени U^n, на котором он принимает значение «истина». Пусть, например, U – множество людей, а $P(x, y)$ означает «x дружит с y». Тогда можно отождествить этот двуместный предикат с множеством пар людей, являющихся друзьями.

Одноместные предикаты выражают свойства объектов, а многоместные – взаимосвязи между несколькими объектами. Предикаты являются атомарными формулами, применяя к ним логические связки, получаем формулы исчисления предикатов, также зависящие от некоторых предметных переменных. Тот факт, что формула Φ зависит от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, будем обозначать $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Понятие предиката является более общим по сравнению с понятием операции. Для n-местной операции f можно определить $n+1$-местный предикат P_f следующим образом: $P_f(a_1, a_2, \ldots, a_n, b) = 1$ тогда и только тогда, когда $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = b$.

Важной конструкцией в исчислении предикатов являются кванторы. Квантор всеобщности $\forall x \Phi(x)$ читается «для любого x верно, что $\Phi(x)$». Если множество $U = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ конечно, то

$$\forall x \Phi(x) \equiv \Phi(a_1) \wedge \Phi(a_2) \wedge \ldots \wedge \Phi(a_m) \ .$$

Квантор существования $\exists x \Phi(x)$ означает «для некоторого x верно, что $\Phi(x)$». Если множество $U = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ конечно, то

$$\exists x \Phi(x) \equiv \Phi(a_1) \vee \Phi(a_2) \vee \ldots \vee \Phi(a_m) \ .$$

Значение формулы с квантором уже не зависит от той переменной, которая стоит «под знаком квантора». Такие переменные называются связанными, остальные – свободными. Очевидно, что связанную переменную можно переобозначить другой буквой и смысл формулы останется прежним.

Совокупность символов для операций и предикатов называется сигнатура. Она предполагается заданной заранее. Атомарные формулы имеют вид $t_1 \approx t_2$ или $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, где P – n-местный предикат, а $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – термы заданной сигнатуры.

Определение формулы исчисления предикатов следующее [2]:

1. Атомарная формула есть формула.

2. Если Φ – формула, то $\neg\Phi$ – тоже формула.

3. Если Φ и Ψ – формулы, то $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$ и $(\Phi \to \Psi)$ – тоже формулы.

4. Если Φ – формула, а x – предметная переменная, то $\forall x \Phi$ и $\exists x \Phi$ – тоже формулы.

Через $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$ обозначается формула, получающаяся из формулы Φ в результате одновременной подстановки вместо всех свободных вхождений переменных $x_1, \ldots, x_n$ термов $t_1, \ldots, t_n$ соответственно. При этом предполагается выполнение условия на запись: переменные, которые входят в термы $t_1, \ldots, t_n$, не должны оказаться в области действия соответствующего квантора. Это условие нетрудно выполнить, переименовав связанные переменные так, чтобы они не встречались в $t_1, \ldots, t_n$.

Определение секвенций совпадает с их определением в исчислении высказываний (см. главу 1).

Аксиомы исчисления предикатов имеют вид

1. $\Phi \ \vdash \ \Phi$, где Φ – любая формула.

2. $\vdash \ x \approx x$, где x – любая предметная переменная.

3. $t_1 \approx q_1, \ldots, t_n \approx q_n, (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n} \vdash (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{q_1,\ldots,q_n}$, где Φ – любая формула, а t_i, q_i – термы.

Правил вывода в исчислении предикатов 16. Из них первые 12 полностью совпадают с правилами вывода исчисления высказываний (см. п. 1.2). В правилах 13 и 16 предполагается, что переменная x не входит в формулы из Γ и в Ψ.

13. $\dfrac{\Gamma \ \vdash \ \Phi}{\Gamma \ \vdash \ \forall x \Phi}$.

14. $\dfrac{\Gamma, (\Phi)^x_t \ \vdash \ \Psi}{\Gamma, \forall x \Phi \ \vdash \ \Psi}$.

15. $\dfrac{\Gamma \ \vdash \ (\Phi)^x_t}{\Gamma \ \vdash \ \exists x \Phi}$.

16. $\dfrac{\Gamma, \Phi \ \vdash \ \Psi}{\Gamma, \exists x \Phi \ \vdash \ \Psi}$.

Заметим, что схема аксиом 1 совпадает со схемой аксиом исчисления высказываний. Поэтому если в любой доказуемой секвенции исчисления высказываний заменить пропозициональные переменные на атомарные формулы исчисления предикатов, то получим доказуемую секвенцию исчисления предикатов. Такие секвенции называются тавтологиями.

2.1 Проблемы перевода

Высказывания на естественном языке (то есть на языке, используемым для общения людей) отличаются неполнотой и многозначностью. Формулы исчисления предикатов являются строгими однозначными математическими конструкциями. Поэтому при переводе с естественного языка на язык исчисления предикатов возникают определенные трудности. Освещение всех аспектов этой проблемы занимает много места, поэтому рекомендуем прочитать книгу [3]. Для решения всех вариантов задания 2 требуется обратить внимание на следующие моменты.

В первую очередь следует точно определить универсум, то есть ограничить совокупность рассматриваемых объектов. Затем вводятся предикаты, соответствующие присутствующим в высказываниях свойствам и связям. Предикаты описываются полными предложениями с подлежащим и сказуемым. В качестве подлежащего, как правило, выступает предметная переменная.

Следующий шаг – определение нужных кванторов. При этом приходится иногда переформулировать высказывание естественного языка так, чтобы при сохранении смысла кванторные конструкции присутствовали явно. Например, высказывание «Волки – млекопитающие» переформулируется «Все волки – млекопитающие» и становится ясно, что присутствует квантор всеобщности. Высказывания об уникальных, единичных объектах также переводятся с квантором всеобщности.

Наконец, определяются логические связки. Чаще всего с квантором всеобщности употребляется импликация, с квантором существования – конъюнкция, хотя возможны и более сложные примеры. Будьте внимательны с отрицанием: в русском языке дважды употребляемое отрицание соответствует одному отрицанию в логике. Например, «Ни один купец не банкрот» имеет смысл «Все купцы не банкроты».

2.2 Особенности логического вывода

Применение метода резолюций в исчислении предикатов несколько сложнее, чем в исчислении высказываний (см. п. 1.3). Во-первых, квантор всеобщности подразумевается во всех дизъюнктах, в которых есть предметные переменные. В случае присутствия квантора существования необходимо предварительно провести сколемизацию формулы (см. [1]). Если квантор существования единственный в формуле, то это значит просто введение дополнительной константы вместо предметной переменной.

Затем дизъюнкты приводятся к КНФ и иищутся контрарные литеры, в качестве которых выступают символы предикатов. Но в отличие от исчисления высказываний, предикаты зависят от переменных. Поэтому возможна такая ситуация: символы предикатов одинаковы, а переменные у них разные. Тогда требуется провести процедуру унификации. Подробно она описана в книге [2]. В нашем задании унификация состоит из одной подстановки.

Пример 2.1. Перевести с естественного языка на язык исчисления предикатов и сделать вывод, если это возможно.

Некоторые уроки трудны

То, что трудно, требует внимания

Переформулируем второе высказывание с целью явного определения кванторов.

Всё, что трудно, требует внимания

Анализируя оба предложения определяем универсум: множество занятий (видов деятельности). Зафиксируем на бумаге описание предметной переменной.

x – занятие.

Определяем предикаты:

$U(x) : x$ – урок;

$T(x) : x$ – трудное занятие;

$V(x) : x$ требует внимания.

В первом предложении присутствует квантор существования, во втором – квантор всеобщности. Правильный перевод на язык исчисления предикатов (вспомним, что с квантором всеобщности употребляется импликация, с квантором существования – конъюнкция):

$$\exists x\, U(x) \wedge T(x) \ ;$$

$$\forall x\, T(x) \to V(x) \ .$$

Перед применением метода резолюций проводим сколемизацию первой формулы с введением константы c, обозначающей тот самый конкретный урок, который является трудным:

$$U(c) \wedge T(c) = \Phi_1 \ .$$

Во второй формуле опускаем квантор всеобщности и используем эквивалентность

$$T(x) \to V(x) \equiv \neg T(x) \vee V(x) = \Phi_2 \ .$$

Нужно определить, существует ли логический вывод из двух формул Φ_1, Φ_2. В п. 1.2 было показано, что $\Phi_1, \Phi_2 \vdash \Phi_1 \wedge \Phi_2$. Формуле $\Phi_1 \wedge \Phi_2$ соответствует множество дизъюнктов $S = \{D_1 = U(c), D_2 = T(c), D_3 = \neg T(x) \vee V(x)\}$ в КНФ. Во втором и третьем дизъюнктах есть контрарные литеры T, но требуется унификация, а именно полагаем $x = c$. Тогда их резольвентой будет

$$\underset{x=c}{\mathrm{res}}(D_1, D_2) = \mathrm{res}(T(c), \neg T(c) \vee V(c)) = V(c).$$

Как показано в п. 1.3, резольвента двух дизъюнктов является логическим следствием их конъюнкции. Используя правила 1 и Т, получаем $\Phi_1, \Phi_2 \ \vdash \ U(c) \wedge V(c)$. Применим правило 15 исчисления предикатов, учитывая, что $U(c) \wedge V(c) = (U(x) \wedge V(x))^x_c$.

$$\frac{\Phi_1, \Phi_2 \ \vdash \ U(c) \wedge V(c)}{\Phi_1, \Phi_2 \ \vdash \ \exists x\, U(x) \wedge V(x)} (15).$$

Логическим выводом из исходных формул является формула $\exists x\, U(x) \wedge V(x)$, которая дословно переводится обратно на русский язык: «Существует занятие, которое является уроком и требует внимания».

Стилистически более грамотным будет ответ: «Некоторые уроки требуют внимания».

Примечание. Для краткости обозначим $\Phi_1 = U(c) \wedge T(c)$, $\Phi_2 = \neg T(x) \vee V(x)$. Используя доказанную в п. 1.3 секвенцию $D_i, D_j \vdash \mathrm{res}(D_i, D_j)$, приведём подробное обоснование правильности полученного выше вывода. Сначала заметим, что

$$\frac{\Phi_1 \ \vdash \ \Phi_1}{\Phi_1 \ \vdash \ U(c)}(2), \qquad \frac{\Phi_1 \ \vdash \ \Phi_1}{\Phi_1 \ \vdash \ T(c)}(3).$$

Далее

$$\frac{\dfrac{\Phi_1 \ \vdash \ U(c)}{\Phi_1, (\Phi_2)^x_c \ \vdash \ U(c)}(12) \quad \dfrac{\Phi_1 \ \vdash \ T(c); \ \ T(c), (\Phi_2)^x_c \ \vdash \ V(c)}{\Phi_1, (\Phi_2)^x_c \ \vdash \ V(c)}(\mathrm{T})}{\Phi_1, (\Phi_2)^x_c \ \vdash \ U(c) \wedge V(c)}(1).$$

Квантор всеобщности не записывался в примере, но подразумевался:

$$\frac{\Phi_1, (\Phi_2)^x_c \ \vdash \ U(c) \wedge V(c)}{\Phi_1, \forall x \Phi_2 \ \vdash \ U(c) \wedge V(c)}(14).$$

Последняя секвенция совпадает по сути с $\Phi_1, \Phi_2 \ \vdash \ U(c) \wedge V(c)$.

Пример 2.2. Перевести с естественного языка на язык исчисления предикатов и сделать вывод, если это возможно.

Все львы – дикие животные

Встреча с любым диким животным может быть опасна

Определяем универсум: множество животных. Зафиксируем на бумаге описание предметной переменной.

x – животное.

Определяем предикаты:

$L(x)$: x – лев;

$D(x)$: x – дикое животные;

$O(x)$: встреча с x может быть опасна.

В обоих предложениях присутствует квантор всеобщности. Перевод на язык исчисления предикатов:

$$\forall x \, L(x) \to D(x) \ ;$$

$$\forall x \, D(x) \to O(x) \ .$$

Опускаем квантор всеобщности и используем эквивалентность:

$$L(x) \to D(x) \equiv \neg L(x) \vee D(x) = \Phi_1 \ ;$$

$$D(x) \to O(x) \equiv \neg D(x) \vee O(x) = \Phi_2 \ .$$

Находим резольвенту

$$\mathrm{res}(\Phi_1, \Phi_2) = \mathrm{res}(\neg L(x) \vee D(x), \neg D(x) \vee O(x)) = \neg L(x) \vee O(x).$$

Так как $\neg L(x) \vee O(x) \equiv L(x) \to D(x)$, то $\Phi_1, \Phi_2 \ \vdash \ L(x) \to D(x)$. Вспоминая про квантор, запишем вывод: $\forall x \, L(x) \to D(x)$. Это дословно переводится обратно на русский язык: «Для всех животных верно, если это лев, то встреча с ним может быть опасна».

Стилистически более грамотным будет ответ: «Встреча с любым львом может быть опасна».

Примечание. Во избежание недоразумений следует переименовывать связанные переменные от разных кванторов, чтобы они были различны. То есть более точным было бы использовать $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(y)$. Но в нашем случае это привело бы к унификации $y = x$ перед вычислением резольвенты, и ответ получился бы таким же.

Обоснованием опускания и восстановления кванторов всеобщности служат следующие фрагменты дерева доказательства:

$$\frac{(\Phi)^x_x \vdash (\Phi)^x_x}{\forall x\, \Phi \vdash (\Phi)^x_x}(14) \qquad \frac{\dfrac{\Phi_1, \Phi_2 \vdash \Psi}{\forall x\, \Phi_1, \forall x\, \Phi_2 \vdash \Psi}(14)}{\forall x\, \Phi_1, \forall x\, \Phi_2 \vdash \forall x\, \Psi}(13).$$

Применение правила 13 разрешено, потому что в посылке после навешивания кванторов всеобщности не осталось свободных вхождений переменной x (напомним, что связанные переменные можно переименовывать: $\forall x\, \Phi(x) \equiv \forall y\, \Phi(y)$).

Другие способы получения вывода из двух и более высказываний приведены в [4].

Глава 3

Задания

Задание 1.

Доказать секвенцию исчисления высказываний тремя способами:

- сравнением таблиц истинности;
- построением доказательства в виде дерева;
- методом резолюций.

Задание 2.

Перевести с естественного языка на язык исчисления предикатов и сделать вывод, если это возможно.

Вариант 1

1. $A \wedge (B \vee C) \ \vdash \ (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
2. *Боль подтачивает силы человека.*

   Никакая боль не желательна.

Вариант 2

1. $\neg(A \wedge B) \vee C \ \vdash \ (\neg A \vee \neg B) \vee C$.
2. *Тем, кто лыс, расческа не нужна.*

   Ни одна ящерица не имеет волос.

Вариант 3

1. $(A \to B) \wedge C \ \vdash \ (A \wedge C) \to (B \wedge C)$.
2. *Все невнимательные люди совершают оплошности.*

   Ни один внимательный человек не забывает своих обещаний.

Вариант 4

1. $(A \wedge B) \vee C \ \vdash \ (A \vee C) \wedge (B \vee C)$.
2. *Мне Джон не нравится.*
   Некоторым из моих друзей Джон нравится.

Вариант 5

1. $A \wedge (B \rightarrow C) \ \vdash \ (A \wedge B) \rightarrow (A \wedge C)$.
2. *Картошка – не ананас.*
   Все ананасы приятны на вкус.

Вариант 6

1. $\neg(A \vee B) \wedge C \ \vdash \ (\neg A \wedge \neg B) \wedge C$.
2. *Ни одна булавка не имеет честолюбия.*
   Ни одна иголка – не булавка.

Вариант 7

1. $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \ \vdash \ (A \vee B) \wedge C$.
2. *Все мои друзья простудились.*
   Тому, кто простужен, нельзя петь.

Вариант 8

1. $A \vee (\neg B \vee \neg C) \ \vdash \ A \vee \neg(B \wedge C)$.
2. *Все эти блюда отлично приготовлены.*
   Некоторые блюда, если их плохо приготовить, вредны для здоровья.

Вариант 9

1. $(A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C) \ \vdash \ A \rightarrow (B \vee C)$.
2. *Все лекарства неприятны на вкус.*
   Александрийский лист – лекарство.

Вариант 10

1. $A \wedge \neg(B \wedge C) \ \vdash \ A \wedge (\neg B \vee \neg C)$.

2. *Некоторые устрицы молчаливы.*

   Молчаливые существа не очень-то забавны.

Вариант 11

1. $(A \to C) \wedge (B \to C) \ \vdash \ (A \vee B) \to C.$
2. *Все разумные люди ходят на ногах.*

   Все неразумные люди ходят на руках.

Вариант 12

1. $A \to (B \wedge C) \ \vdash \ (A \to B) \wedge (A \to C).$
2. *Занимайтесь своим делом.*

   Эта ссора – не ваше дело.

Вариант 13

1. $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \ \vdash \ A \vee (B \wedge C).$
2. *Ни один мост не сделан из сахара.*

   Некоторые мосты очень красивы.

Вариант 14

1. $(A \to B) \wedge (A \to C) \ \vdash \ A \to (B \wedge C).$
2. *Ни одна загадка, имеющая решение, не интересует меня.*

   Все эти загадки неразрешимы.

Вариант 15

1. $\neg(A \vee B) \vee C \ \vdash \ (\neg A \wedge \neg B) \vee C.$
2. *Джон прилежен.*

   Все прилежные люди счастливы.

Вариант 16

1. $A \vee (B \wedge C) \ \vdash \ (A \vee B) \wedge (A \vee C).$
2. *Ни одна лягушка не пишет книг.*

   Некоторые люди пользуются чернилами, когда пишут книги.

Вариант 17

1. $A \to (B \vee C) \ \vdash \ (A \to B) \vee (A \to C)$.

2. *Ни одна кочерга не мягкая.*
   Все подушки мягкие.

Вариант 18

1. $A \wedge (\neg B \vee \neg C) \ \vdash \ A \wedge \neg(B \wedge C)$.

2. *Все антилопы стройные.*
   Стройные животные радуют глаз.

Вариант 19

1. $A \vee (\neg B \wedge \neg C) \ \vdash \ A \vee \neg(B \vee C)$.

2. *Некоторые дядюшки не отличаются щедростью.*
   Все купцы щедры.

Вариант 20

1. $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \ \vdash \ (A \wedge B) \vee C$.

2. *Ни один несчастный человек не хохочет.*
   Ни один счастливый человек не стонет.

Вариант 21

1. $(A \to B) \vee C \ \vdash \ (A \vee C) \to (B \vee C)$.

2. *Музыка, которую слышно, вызывает колебания воздуха.*
   Музыка, которую не слышно, не стоит того, чтобы за нее платили деньги.

Вариант 22

1. $(A \wedge B) \vee C \ \vdash \ (A \vee C) \wedge (B \vee C)$.

2. *Ни один еврей не толстый мельник.*
   Все мои друзья толстые мельники.

Вариант 23

1. $(A \vee B) \to (A \vee C) \ \vdash \ A \vee (B \to C)$.

2. *Мука пригодна для пищи.*

   Толокно – сорт муки.

Вариант 24

1. $(\neg A \vee \neg B) \vee C \ \vdash \ \neg(A \wedge B) \vee C$.
2. *Ласки иногда спят.*

   Все животные иногда спят.

Вариант 25

1. $A \wedge (\neg B \wedge \neg C) \ \vdash \ A \wedge \neg(B \vee C)$.
2. *Некоторые сны ужасны.*

   Ни один ягненок не способен вызвать ужас.

Вариант 26

1. $A \vee \neg(B \wedge C) \ \vdash \ A \vee (\neg B \vee \neg C)$.
2. *Ни один богатый человек не просит милостыни.*

   Всем, кто небогат, следует думать о расходах.

Вариант 27

1. $A \vee (B \to C) \ \vdash \ (A \vee B) \to (A \vee C)$.
2. *Ни один вор не честен.*

   Некоторых нечестных людей удаётся уличить.

Вариант 28

1. $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \ \vdash \ A \wedge (B \vee C)$.
2. *Все осы не общительные.*

   Все щенки общительные.

Вариант 29

1. $A \wedge \neg(B \vee C) \ \vdash \ A \wedge (\neg B \wedge \neg C)$.
2. *Все неправдоподобные истории вызывают сомнение.*

   Все эти истории вполне правдоподобны.

Вариант 30

1. $\neg(A \wedge B) \wedge C \ \vdash\ (\neg A \vee \neg B) \wedge C)$.

2. *Он сказал мне, что вы ушли.*

   Он никогда не говорит ни слова правды.

Вариант 31

1. $(\neg A \wedge \neg B) \vee C \ \vdash\ \neg(A \vee B) \vee C$.

2. *Он всегда поет меньше часа.*

   Слушать пение больше часа утомительно.

Вариант 32

1. $(A \vee B) \wedge C \ \vdash\ (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

2. *Ни один свадебный пирог не полезен.*

   Неполезной пищи следует избегать.

Вариант 33

1. $(A \vee B) \to C \ \vdash\ (A \to C) \wedge (B \to C)$.

2. *Ни один старый скряга не весел.*

   Некоторые старые скряги тощи.

Вариант 34

1. $(\neg A \wedge \neg B) \wedge C \ \vdash\ \neg(A \vee B) \wedge C$.

2. *Все утки при ходьбе переваливаются с боку на бок.*

   Все, что переваливается с боку на бок, не изящно.

Вариант 35

1. $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \ \vdash\ (A \vee B) \wedge C$.

2. *Ни один профессор не невежествен.*

   Некоторые невежественные люди тщеславны.

Вариант 36

1. $A \vee \neg(B \vee C) \ \vdash\ A \vee (\neg B \wedge \neg C)$.

2. *Зубная боль всегда неприятна.*
   Тепло всегда приятно.

Вариант 37

1. $(A \vee C) \to (B \vee C) \ \vdash \ (A \to B) \vee C.$
2. *Скучные люди невыносимы.*
   Вы скучный человек.

Вариант 38

1. $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \ \vdash \ A \wedge (B \vee C).$
2. *Некоторые горы непреодолимы.*
   Все заборы вполне преодолимы.

Вариант 39

1. $(\neg A \vee \neg B) \wedge C \ \vdash \ \neg(A \wedge B) \wedge C.$
2. *Ни один француз не любит пудинг.*
   Все англичане любят пудинг.

Вариант 40

1. $A \vee (B \wedge C) \ \vdash \ (A \vee B) \wedge (A \vee C).$
2. *Ни один лентяй не достоин славы.*
   Некоторые художники не лентяи.

Глава 4

Образец оформления решения

Задание 1.
Доказать секвенцию $A \wedge B \to C \vdash A \to (B \to C)$ тремя способами:

- сравнением таблиц истинности;
- построением доказательства в виде дерева;
- методом резолюций.

Способ 1.
Таблица истинности для левой части секвенции:

A	B	C	$A \wedge B$	$A \wedge B \to C$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Таблица истинности для правой части секвенции:

A	B	C	$B \to C$	$A \to (B \to C)$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Видим, что последние столбцы в обеих таблицах совпадают.

Способ 2.

У дерева доказательства внизу (в корне) находится секвенция, которую надо доказать, а вверху (листья) находятся аксиомы. Применение правил 11 и 12 можно опустить, если вверху получатся секвенции, в левой части которых есть формула, совпадающая с формулой правой части секвенции (выделены жирным шрифтом).

$$\dfrac{\dfrac{\mathbf{A}, B \ \vdash \ \mathbf{A}; \quad A, \mathbf{B} \ \vdash \ \mathbf{B}}{A, B \ \vdash \ A \wedge B;}(1) \quad \dfrac{A \wedge B \vdash A \wedge B; \ A \wedge B \to C \vdash A \wedge B \to C}{A \wedge B \to C, A \wedge B \ \vdash \ C}(8)}{\dfrac{\dfrac{A \wedge B \to C, A, B \ \vdash \ C}{A \wedge B \to C, A \ \vdash \ B \to C}(7)}{A \wedge B \to C \ \vdash \ A \to (B \to C)}(7)}(T) \ .$$

Способ 3.

Переносим всё в левую часть:

$$A \wedge B \to C, \neg(A \to (B \to C)) \vdash$$

Для доказательства методом резолюций приводим к КНФ:

$$\begin{aligned} (A \wedge B \to C) \wedge (\neg(A \to (B \to C))) &\equiv \\ (\neg(A \wedge B) \vee C) \wedge (\neg(\neg A \vee (\neg B \vee C))) &\equiv \\ (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge A \wedge B \wedge \neg C \ . \end{aligned}$$

Начальное множество дизъюнктов:

$$D_1 = \neg A \vee \neg B \vee C, \ D_2 = A, \ D_3 = B, \ D_4 = \neg C.$$

Теперь:

$$\begin{aligned} D_5 = \mathrm{res}(D_1, D_2) = \mathrm{res}(\neg A \vee \neg B \vee C, A) &= \neg B \vee C; \\ D_6 = \mathrm{res}(D_5, D_3) = \mathrm{res}(\neg B \vee C, B) &= C; \\ D_7 = \mathrm{res}(D_6, D_4) = \mathrm{res}(C, \neg C) &= 0. \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

Задание 2.

Перевести с естественного языка на язык исчисления предикатов и сделать вывод, если это возможно.

Все шутки для того и придуманы, чтобы смешить людей.
Ни один парламентский акт не шутка.

Переформулируем вторую фразу:
Все парламентские акты не шутка.
Определим универсум: x – текст.
Обозначим:
$S(x)$: x является шуткой;
$L(x)$: x придуман, чтобы смешить людей;
$P(x)$: x – парламентский акт.

Перевод:

$$\forall x(S(x) \to L(x));$$

$$\forall x(P(x) \to \neg S(x)).$$

Перед применением метода резолюций опускаем квантор всеобщности и используем эквивалентность

$$S(x) \to L(x) \equiv \underline{\neg S(x)} \vee L(x) = \Phi_1;$$

$$P(x) \to \neg S(x) \equiv \neg P(x) \vee \underline{\neg S(x)} = \Phi_2.$$

Так как нет контрарных литер, то никакого вывода из Φ_1, Φ_2 сделать нельзя.

Литература

[1] Гуц А.К. *Математическая логика и теория алгортмов* : учебное пособие. М.: Либроком, 2009.

[2] Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. *Математическая логика и теория алгоритмов.* М.: ИНФРА–М; Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004.

[3] Непейвода Н.Н. *Прикладная логика.* Новосибирск: НГУ, 2000.

[4] Кэррол Л. *История с узелками.* М.: Мир, 1973.

[5] Лавров И.А., Максимова Л.Л. *Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгортмов.* М.: Наука, 1975.